41　a を実数とする。関数 $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{2a+1}{2}x^2-ax$ が $x=a$ で極大値をとるとき，次の問いに答えよ。

(1)　a の満たす条件を求めよ。

(2)　次の不等式を解け。

$$|x+1|+|x-2|\leqq 4$$

(3)　x が (2) の範囲を動くとき，$f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。　〔広島大〕

(1)　$f'(x)=-2x^2+(2a+1)x-a$ である。

方程式 $f'(x)=0$ は $-(x-a)(2x-1)=0$ とできて

$a\fallingdotseq\dfrac{1}{2}$ のとき，

$f'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解 $x=a,\ \dfrac{1}{2}$ $\cdots$① をもつ。

$f(x)$ の x^3 の係数が $-\dfrac{2}{3}<0$ から ① 大きい方の解で $f(x)$ は極大となるので，求める範囲は $\boldsymbol{a>\dfrac{1}{2}}$

◀

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

(2)　$y=|x+1|+|x-2|$ $\cdots$② のグラフを考える。

$x\leqq-1$ のとき　$y=-(x+1)-(x-2)=-2x+1$

$-1\leqq x\leqq 2$ のとき　$y=(x+1)-(x-2)=3$

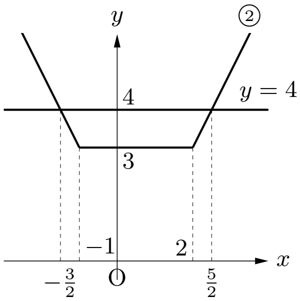
$2\leqq x$ のとき　$y=(x+1)+(x-2)=2x-1$

◀ 絶対値が(複数)あるものは，前提条件の吟味など煩雑になるのでグラフで処理した方が簡明である。

② のグラフと

$y=4$ の位置関係から

$\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq\dfrac{5}{2}}$



(3)　(2) の範囲で増減表は

$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{5}{2}$ のとき

x	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	

$\frac{5}{2} \leqq a$ のとき

x	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	極小	↗	

ここで，方程式 $f(x) = f(a)$（極大値）を解くと

$$-\frac{2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax = -\frac{2}{3}a^3 + \frac{2a+1}{2}a^2 - a \cdot a$$

$$4\left(x^3 - a^3\right) - 3\left(2a+1\right)\left(x^2 - a^2\right) + 6a\left(x - a\right) = 0$$

$$\left(x - a\right)\left\{4\left(x^2 + ax + a^2\right) - 3\left(2a+1\right)\left(x + a\right) + 6a\right\} = 0$$

$$\left(x - a\right)\left\{4x^2 - \left(2a+3\right)x - 2a^2 + 3a\right\} = 0$$

$$\left(x - a\right)\left(x - a\right)(4x + (2a - 3)) = 0$$

$$x = \frac{3-2a}{4},\ a\text{（重解）} \cdots ③$$

また，$f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ の解は，$\beta = \frac{1}{2}$ として

$$-\frac{2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax = -\frac{2}{3}\beta^3 + \frac{2a+1}{2}\beta^2 - a \cdot \beta$$

$$4\left(x^3 - \beta^3\right) - 3\left(2a+1\right)\left(x^2 - \beta^2\right) + 6a\left(x - \beta\right) = 0$$

$$\left(x - \beta\right)\left\{4\left(x^2 + \beta x + \beta^2\right) - 3\left(2a+1\right)\left(x + \beta\right) + 6a\right\} = 0$$

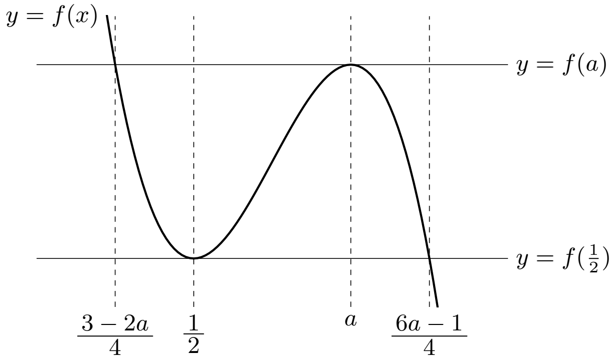
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left\{4\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - 3\left(2a+1\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + 6a\right\} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left\{4x^2 - \left(6a+1\right)x + 3a - \frac{1}{2}\right\} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(4x - (6a - 1)\right) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\text{（重解）},\ \frac{6a-1}{4} \cdots ④$$

$y = f(x)$ と ③，④ の関係は下図の通り



最大値，最小値は極値または区間の端点での値となるので

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3+\frac{2a+1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2-a\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{15}{4}a+\frac{27}{8}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{2a+1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{4}a+\frac{1}{24}$$

$$f(a)=-\frac{2}{3}a^3+\frac{2a+1}{2}a^2-a\cdot a$$
$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3+\frac{2a+1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-a\cdot\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$=\frac{15}{4}a-\frac{175}{24}$$

最小値について，極小値をとる $x=\frac{1}{2}$ は定義域に含まれるので，区間の右端 $x=\frac{5}{2}$ と $\frac{6a-1}{4}$ を比較する。

$\frac{5}{2}<\frac{6a-1}{4}$ すなわち

$\boldsymbol{a>\frac{11}{6}}$ **のとき**，最小値は $f\left(\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{-\frac{1}{4}a+\frac{1}{24}}$

$\boldsymbol{\frac{1}{2}<a\leqq\frac{11}{6}}$ **のとき**，最小値は $f\left(\frac{5}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{15}{4}a-\frac{175}{24}}$

最大値について，$f\left(-\frac{3}{2}\right)\geqq f(a)$ となるのは

$x=\frac{3-2a}{4}$ が定義域に含まれるときであり，

$-\frac{3}{2}\leqq\frac{3-2a}{4}$ を解いて $\left(\frac{1}{2}<\right)a\leqq\frac{9}{2}$

このとき最大値は $f\left(-\frac{3}{2}\right)$

$a>\frac{9}{2}$ のとき $\frac{3-2a}{4}<-\frac{3}{2}<\frac{1}{2}<\frac{5}{2}<a$ から

最大値は $f\left(-\frac{3}{2}\right)$，$f\left(\frac{5}{2}\right)$ のいずれか

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{4}a+\frac{27}{8}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{15}{4}a-\frac{175}{24}$$

したがって $a>\frac{1}{2}$ のとき最大値は $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{15}{4}a+\frac{27}{8}}$

42 次の問いに答えなさい。

(1) 中心を O とする半径 1 の円に内接する正 24 角形の隣り合う 2 つの頂点を A，B とする。$\triangle$OAB の面積を求めなさい。

(2) 不等式

$$\pi > 3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$$

が成り立つことを証明しなさい。〔信州大〕

(1) $\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{360^\circ}{24} = 15^\circ$ である。

三角関数の加法定理を用いて

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(60^\circ - 45^\circ)\\ &= \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{から}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OAB} &= \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{AOB}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}\end{aligned}$$

(2) (1) の円と正 24 角形について，正 24 角形は円に含まれているので

（円の面積）>（正 24 角形の面積） が成り立つ

すなわち

$\pi\cdot 1^2 > 24\triangle\mathrm{OAB}$ から

$\pi > 3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ を得る

43 $\triangle$ABC の外心を O，垂心を H とするとき，下の問いに答えよ。ただし，三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わり，その点を三角形の垂心という。

(1) 等式 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が成り立つことを示せ。

(2) 等式 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{(2+\sqrt{3})\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3+2\sqrt{3}}$ が成り立つような $\angle$A の大きさを求めよ。

〔東京学芸大〕

O を外心とすると $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=d\cdots$① とできる。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots$② となる P について

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\ (\because ②)\\&=-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\&=0\cdots③\ (\because ①)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\&=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\ (\because ②)\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\&=0\cdots④\ (\because ①)\end{aligned}$$

③，④ は点 P が $\triangle$ABC の垂心であることを表している。
したがって，垂心を H とすれば

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が成り立つ。

(2) 両辺 $3+2\sqrt{3}$ 倍して

$$(3+2\sqrt{3})\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2+\sqrt{3})\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$(3+2\sqrt{3})(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=(2+\sqrt{3})\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ (\because (1))$$

$$(1+\sqrt{3})\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(3+\sqrt{3})\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(2+2\sqrt{3})\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

$$-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\sqrt{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$|-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\sqrt{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=3|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+4\sqrt{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\cdots⑤$$

① を用いると ⑤ は

$$d^2=3d^2+4\sqrt{3}\,d^2\cos\angle\mathrm{BOC}+4d^2$$

$d\neq 0$ から $\cos\angle\mathrm{BOC}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $\angle\mathrm{BOC}=150^\circ$
円周角の性質から

$$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}=\mathbf{75^\circ}$$