38 平面上に $\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=7$，$\mathrm{CA}=6$ となる $\triangle\mathrm{ABC}$ を考える。$\angle\mathrm{BAC}$ の 2 等分線と辺 BC の交点を P とする。t を $0<t<1$ をみたす実数とし，辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。線分 AP と線分 CQ の交点を R とする。以下の問いに答えなさい。

(1) $\cos\angle\mathrm{BAC}$ を求めなさい。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めなさい。

(3) $\triangle\mathrm{APC}$ の面積を求めなさい。

(4) $\triangle\mathrm{AQR}$ の面積と $\triangle\mathrm{RPC}$ の面積の比が $3:2$ となる t の値を求めなさい。〔東京都立大〕

簡単のため $a=7$，$b=6$，$c=3$ とする。

(1) 余弦定理から

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{BAC}&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\&=\frac{6^2+3^2-7^2}{2\cdot6\cdot3}\\&=\boldsymbol{-\frac{1}{9}}\end{aligned}$$

(2) $\sin\angle\mathrm{BAC}>0$ から

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{BAC}&=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}}\\&=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{9}\right)^2}\\&=\frac{4\sqrt{5}}{9}\end{aligned}$$

面積公式を用いて

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BAC}&=\frac{1}{2}bc\sin\angle\mathrm{BAC}\\&=\frac{1}{2}\cdot6\cdot3\cdot\frac{4\sqrt{5}}{9}\\&=\boldsymbol{4\sqrt{5}}\end{aligned}$$

(3) 角の二等分線の性質から $\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=3:6$

したがって

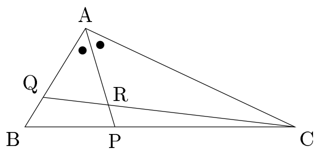
$$\triangle\mathrm{APC}=\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BC}}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}=\boldsymbol{\frac{8}{3}\sqrt{5}}$$

(4) $\triangle\mathrm{ABP}$ と直線 CQ にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CP}}\cdot\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RA}}=1$$

$$\frac{t}{1-t}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RA}}=1$$

$$\mathrm{PR}:\mathrm{RA}=2(1-t):3t\cdots①$$



◀ AR:RP または AP:AR を求めておくと解答しやすい

ここで

$$\triangle \mathrm{AQR} = \frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AB}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AP}} \triangle \mathrm{ABP}$$
$$= \frac{t}{1} \cdot \frac{3t}{2+t} \cdot \frac{1}{3} \triangle \mathrm{ABC} \cdots ② \ (\because ①)$$

$$\triangle \mathrm{RPC} = \frac{2}{3} \triangle \mathrm{RBC}$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{AP}} \triangle \mathrm{ABC}$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2(1-t)}{2+t} \triangle \mathrm{ABC} \cdots ③ \ (\because ①)$$

$\triangle \mathrm{AQR} : \triangle \mathrm{RPC} = 3:2$ のとき ②，③ から

$$\frac{3t^2}{2+t} : \frac{4(1-t)}{2+t} = 3:2$$

$$t^2 = 2(1-t)$$

$$t^2 + 2t - 2 = 0$$

解の公式を用いて $0 < t < 1$ から $\boldsymbol{t = -1 + \sqrt{3}}$

◀ それぞれの三角形の面積を具体的に求めるのでなく，基準となる三角形の（ここでは △ABC）の何倍になっているかを求めている。

39 x_1，x_2，x_3，y_1，y_2，y_3 はそれぞれ 1，2，4 のいずれかの値を取るとする。

(1) 等式

$$x_1 \times x_2 \times x_3 = y_1 \times y_2 \times y_3$$

を満たすような x_1，x_2，x_3，y_1，y_2，y_3 の組は何通りあるか求めよ。

(2) 等式

$$x_1 \times x_2 \times x_3 = 4 \times y_1 \times y_2 \times y_3$$

を満たすような x_1，x_2，x_3，y_1，y_2，y_3 の組は何通りあるか求めよ。〔愛知教育大〕

$i = 1, 2, 3$ について

$x_i = 2^{a_i}$ $(a_i = 0, 1, 2)$, $y_i = 2^{b_i}$ $(b_i = 0, 1, 2)$　とする

(1) $x_1 \times x_2 \times x_3 = 2^{a_1} \times 2^{a_2} \times 2^{a_3} = 2^{a_1+a_2+a_3}$ であり

$0 \leqq a_1 + a_2 + a_3 \leqq 6$ から

- $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ のとき $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$ の 1 通り，
  (b_1, b_2, b_3) の選び方も 1 通りから
  x_1〜 y_3 までの選び方は $1^2 = 1$（通り）

- $a_1+a_2+a_3 = 1$ のとき a_1, a_2, a_3 の順序を無視して $\{0, 0, 1\}$
  a_1，a_2，a_3 の順序を考えて $\dfrac{3!}{2!1!} = 3$（通り）
  x_1〜 y_3 までの選び方は $3^2 = 9$（通り）

- $a_1 + a_2 + a_3 = 2$ のとき
  - ○ 順序を無視して $\{0, 0, 2\}$ のとき順序を考え 3 通り
  - ○ $\{0, 1, 1\}$ のとき 3 通り

  a_1，a_2，a_3 の選び方は $3 + 3 = 6$（通り）
  x_1〜 y_3 までの選び方は $6^2 = 36$（通り）

- $a_1 + a_2 + a_3 = 3$ のとき
  - ○ $\{0, 1, 2\}$ のとき $3! = 6$（通り）
  - ○ $\{1, 1, 1\}$ のとき 1 通り

  a_1，a_2，a_3 の選び方は $6 + 1 = 7$（通り）
  x_1〜 y_3 までの選び方は $7^2 = 49$（通り）

- $a_1 + a_2 + a_3 = 4$ のとき
  - ○ $\{2, 2, 0\}$ のとき 3 通り
  - ○ $\{1, 1, 2\}$ のとき 3 通り

  a_1，a_2，a_3 の選び方は $3 + 3 = 6$（通り）

x_1〜 y_3 までの選び方は $6^2 = 36$（通り）

- $a_1 + a_2 + a_3 = 5$ のとき $\{2, 2, 1\}$ の 3 通り
  x_1〜 y_3 までの選び方は $3^2 = 9$（通り）

- $a_1 + a_2 + a_3 = 6$ のとき $\{2, 2, 2\}$ の 1 通り
  x_1〜 y_3 までの選び方は $1^2 = 1$（通り）

したがって，求める選び方は

$1 + 9 + 36 + 49 + 36 + 9 + 1 =$ **141（通り）**

(2) $4 \times y_1 \times y_2 \times y_3 = 2^2 \times 2^{b_1} \times 2^{b_2} \times 2^{b_3} = 2^{2+b_1+b_2+b_3}$ であり

$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 + 2$　となるのは

- $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 + 2 = 2$ となるのは
  a_1，a_2，a_3 の選び方は 6 通り，b_1，b_2，b_3 の選び方は 1 通り
  x_1〜 y_3 までの選び方は $6 \times 1 = 6$（通り）

- $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 + 2 = 3$ となるのは
  a_1，a_2，a_3 の選び方は 7 通り，b_1，b_2，b_3 の選び方は 3 通り
  x_1〜 y_3 までの選び方は $7 \times 3 = 21$（通り）

- $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 + 2 = 4$ となるのは
  a_1，a_2，a_3 の選び方は 6 通り，b_1，b_2，b_3 の選び方は 6 通り
  x_1〜 y_3 までの選び方は $6 \times 6 = 36$（通り）

- $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 + 2 = 5$ となるのは
  a_1，a_2，a_3 の選び方は 3 通り，b_1，b_2，b_3 の選び方は 7 通り
  x_1〜 y_3 までの選び方は $3 \times 7 = 21$（通り）

- $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 + 2 = 6$ となるのは
  a_1，a_2，a_3 の選び方は 1 通り，b_1，b_2，b_3 の選び方は 6 通り
  x_1〜 y_3 までの選び方は $1 \times 6 = 6$（通り）

したがって，求める選び方は

$6 + 21 + 36 + 21 + 6 =$ **90（通り）**

$\boxed{40}$ 3 つの円 $C_1 : (x-1)^2+(y-4)^2=27$，$C_2 : (x-3)^2+(y-1)^2=10$，$C_3 : (x-4)^2+y^2=10$ について，次の各問に答えよ。

(1) C_1 と C_2 の 2 つの交点を通る直線 ℓ の方程式と，C_1 と C_3 の 2 つの交点を通る直線 m の方程式を求めよ。

(2) x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点という。ℓ 上の格子点の座標と，m 上の格子点の座標をすべて求めよ。

(3) ℓ と m の交点の座標を (a, b) とする。ℓ 上の格子点の x 座標で a 以上のものを小さい順に並べた数列を $\{a_n\}$ とし，m 上の格子点の y 座標で b 以上のものを小さい順に並べた数列を $\{b_n\}$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k b_k}$ を求めよ。

〔茨城大〕

(1) C_1 を $x^2+y^2-2x-8y-10=0 \cdots ①$

C_2 を $x^2+y^2-6x-2y=0 \cdots ②$

C_3 を $x^2+y^2-8x+6=0 \cdots ③$ として

ℓ の方程式は ① − ② から

$$x^2+y^2-2x-8y-10=x^2+y^2-6x-2y$$

$4x-6y-10=0$ すなわち $\mathbf{2x-3y-5=0}$

m の方程式は ① − ③ から

$$x^2+y^2-2x-8y-10=x^2+y^2-8x+6$$

$6x-8y-16=0$ すなわち $\mathbf{3x-4y-8=0}$

◀ 厳密にいうと，C_1 と C_2 は異なる 2 点で交わることを示さなければならないかもしれない ?!

(2) ℓ 上の格子点 (x, y) は方程式 $2x-3y=5 \cdots ④$ の整数解の組である。$(x, y)=(1, -1)$ は ④ の解の 1 つなので

$$2\cdot 1-3\cdot(-1)=5 \cdots ⑤$$

④ − ⑤ から

$$2(x-1)-3(y+1)=0 \quad \text{から}\ 2(x-1)=3(y+1) \cdots ⑥$$

⑥ の左辺は 2 の倍数，左辺は 3 の倍数したがってこの式の値は 2 と 3 の公倍数の 6 の倍数であり，整数 p を用いて $6p$ と表すことができる。

$2(x-1)=3(y+1)=6p$ から $x-1=3p$，$y+1=2p$ より

ℓ 上の格子点は $\mathbf{(3p+1, 2p-1)}$ **(p は任意の整数)**

◀ 最初の特殊解で $(x, y)=(4, 1)$ を見つけたら $(3p+4, 2p+1)$

同様に m 上の格子点 (x, y) は方程式 $3x-4y=8 \cdots ⑦$ の整数解の組である。$(x, y)=(0, -2)$ は ⑦ の解の 1 つなので

$$3\cdot 0-4\cdot(-2)=8 \cdots ⑧$$

⑦ − ⑧ から

$$3x - 4(y+2) = 0 \quad \text{から} \ 3x = 4(y+2) \ \cdots ⑨$$

⑨ の式の値は 12 の倍数なので，整数 q を用いて

$3x = 4(y+2) = 12q$ から $x = 4q$，$y + 2 = 3q$ より

m 上の格子点は $\boldsymbol{(4q\,,\,3q-2)}$ **（q は任意の整数）**

◀ 最初の特殊解で $(x\,,\,y) = (4\,,\,1)$ を見つけたら $(4q+4\,,\,3q+1)$

(3) ℓ と m の交点 $(a\,,\,b)$ は ④，⑦ を連立方程式として解き $(4\,,\,1)$ である。

したがって数列 $\{a_n\}$ は初項 4，公差 3 の等差数列となるので

$$a_n = 4 + 3(n-1) = 3n + 1 \cdots ⑩$$

数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公差 3 の等差数列となるので

$$b_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2 \cdots ⑪$$

ここで

$$\frac{1}{a_k b_k} = \frac{1}{(3k+1)(3k-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right) \ \text{から}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k b_k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k+1} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k+1} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3}\sum_{k=n}^{n} \frac{1}{3k+1} \\
&= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{n}{3n+1}}
\end{aligned}$$

◀ いわゆるパタパタを Σ 記号を用いて計算してみた

◀ $k = 1$ から $n - 1$ までは相殺した