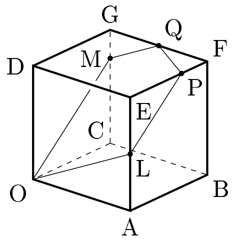
35 下図のように，1 辺の長さが 1 の立方体 DEFG-OABC がある。点 L は線分 AE を 1:1 に，点 M は線分 CG を 3:1 に内分する点である。また，3 点 O，L，M を通る平面 T は，辺 EF および辺 GF と 2 点 P，Q で交わる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とするとき，以下の問いに答えよ。ただし，(1) については答のみでよい。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OL}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|$，および $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を求めよ。

(2) $\cos\angle\mathrm{LOM}$ の値，および $\triangle\mathrm{LOM}$ の面積 S_1 を求めよ。

(3) $\mathrm{EP}:\mathrm{PF}=p:(1-p)$ $(0<p<1)$，$\mathrm{GQ}:\mathrm{QF}=q:(1-q)$ $(0<q<1)$ とする。このとき，p と q の値を求め，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(4) $\overrightarrow{\mathrm{LP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。また，五角形 OLPQM の面積 S_2 を求めよ。

〔長崎大〕

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\boldsymbol{\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\boldsymbol{\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d}}$

$|\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}=0$ を用いて

$$|\overrightarrow{\mathrm{OL}}|^2=\left|\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}\right|^2$$
$$=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{d}+\frac{1}{4}|\vec{d}|^2$$
$$=\frac{5}{4}\quad \text{から}\quad |\overrightarrow{\mathrm{OL}}|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=\left|\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d}\right|^2$$
$$=|\vec{d}|^2+\frac{3}{2}\vec{c}\cdot\vec{d}+\frac{9}{16}|\vec{d}|^2$$
$$=\frac{25}{16}\quad \text{から}\quad |\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\boldsymbol{\frac{5}{4}}$$

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d}\right)$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{a}\cdot\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{d}\cdot\vec{c}+\frac{3}{8}|\vec{d}|^2$$

$= \dfrac{3}{8}$　であり

$$\cos\angle\mathrm{LOM} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OL}}||\overrightarrow{\mathrm{OM}}|} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{5}{4}} = \frac{3}{5\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{5}}{25}}$$

ベクトルの面積公式から

$$S_1 = \triangle\mathrm{OLM} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OL}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}\times\frac{25}{16}-\left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{116}{64}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{29}}{8}}$$

(3)　平面 T 上の点の O を基点とする位置ベクトルは

実数 s，t を用いて

$$s\overrightarrow{\mathrm{OL}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}} = s\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)+t\left(\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{d}\right) = s\vec{a}+t\vec{c}+\left(\frac{1}{2}s+\frac{3}{4}t\right)\vec{d}\ \cdots ①$$　とできる

ここで $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a}+p\vec{c}+\vec{d}$ であり，① の形にできるとき，

$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ は 1 次独立なので

$$\begin{cases} s=1 \\ t=p \\ \frac{1}{2}s+\frac{3}{4}t=1 \end{cases}$$　を解いて $(s,\ t,\ p) = \left(1,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

したがって $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}+\vec{d}}$

同様に $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = q\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$ から

$$\begin{cases} s=q \\ t=1 \\ \frac{1}{2}s+\frac{3}{4}t=1 \end{cases}$$　を解いて $(s,\ t,\ q) = \left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$

したがって $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}}$

(4)　(1)，(3) の結果を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{LP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}}$$

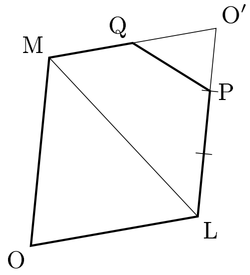
$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{d}}$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{LP}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ から

平面 T 上に $\overrightarrow{\mathrm{OO'}} = \overrightarrow{\mathrm{OL}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となる点 $\mathrm{O'}$ を考えると，P は線分 $\mathrm{O'L}$ を $1:2$ に内分する点，Q は線分 $\mathrm{O'M}$ の中点である。

したがって

$$\begin{aligned} S_2 &= \triangle\mathrm{OLM} + \triangle\mathrm{O'LM} - \triangle\mathrm{O'PQ} \\ &= S_1 + S_1 - \frac{1}{6}S_1 \\ &= \frac{11}{6}S_1 \\ &= \boldsymbol{\frac{11\sqrt{29}}{48}} \end{aligned}$$



36 1, 2, $\cdots$, 15, 16 の数字が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつある。これら 16 枚のカードから 3 枚を同時に選ぶとき，次の問いに答えよ。

(1) 3 枚のカードの数の積が 3 の倍数である確率を求めよ。

(2) 3 枚のカードの数の和が 3 の倍数である確率を求めよ。

(3) 3 枚のカードの数の積が 3 の倍数でなく，3 枚のカードの数の和も 3 の倍数でない確率を求めよ。

〔弘前大〕

説明のため

3 で割ると 1 余る数のグループを $A = \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$,
3 で割ると 2 余る数のグループを $B = \{2, 5, 8, 11, 14\}$,
3 で割ると割り切れる数のグループを $C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ とする。

(1) 余事象は，3 枚のカードすべてが C 以外のカードなので，
求める確率は

$$1 - \frac{{}_{11}\mathrm{C}_3}{{}_{16}\mathrm{C}_3} = 1 - \frac{\dfrac{11\times10\times9}{3\times2\times1}}{\dfrac{16\times15\times14}{3\times2\times1}} = 1 - \frac{11\times10\times9}{16\times15\times14} = \boldsymbol{\frac{79}{112}}$$

(2) 3 枚の和が 3 の倍数となるのは選び方は

- 3 枚とも A のカード

$${}_6\mathrm{C}_3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20\ (\text{通り})$$

- 3 枚とも B のカード

$${}_5\mathrm{C}_3 = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10\ (\text{通り})$$

- 3 枚とも B のカード

$${}_5\mathrm{C}_3 = 10\ (\text{通り})$$

- A，B，C から 1 枚ずつ

$${}_6\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1 = 6 \times 5 \times 5 = 150\ (\text{徹})$$

の 4 通りあり，これらはいずれも排反な事象であるから，
求める確率は

$$\frac{20 + 10 + 10 + 150}{{}_{16}\mathrm{C}_3} = \frac{190}{560} = \boldsymbol{\frac{19}{56}}$$

(3) 条件を満たす選び方は

- A から 2 枚，B から 1 枚選ぶ

$${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_1 = 15 \times 5 = 75\ (\text{通り})$$

- A から 1 枚，B から 2 枚選ぶ

$${}_6\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_2 = 6 \times 10 = 60\ (\text{通り})$$

の 2 通りあり，これらはいずれも排反な事象であるから，

求める確率は

$$\frac{75+60}{{}_{16}\mathrm{C}_3} = \frac{135}{560} = \boldsymbol{\frac{27}{112}}$$

37 a を正の実数とする。放物線 $y=x^2$ を C_1，放物線 $y=-x^2+4ax-4a^2+4a^4$ を C_2 とする。以下の問に答えよ。

(1) 点 $(t\,,t^2)$ における C_1 の接線の方程式を求めよ。

(2) C_1，C_2 が異なる 2 つの共通接線 ℓ，ℓ' を持つような a の値の範囲を求めよ。ただし，C_1 と C_2 の共通接線とは，C_1 と C_2 の両方に接する直線のことである。

以下，a は (2) で求めた範囲にあるとし，ℓ，ℓ' を C_1 と C_2 の異なる 2 つの共通接線とする。

(3) ℓ，ℓ' の交点の座標を求めよ。

(4) C_1 と ℓ，ℓ' で囲まれた領域を D_1 とし，不等式 $x \leqq a$ の表す領域を D_2 とする。D_1 と D_2 の共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。〔名古屋大〕

(1) $y=x^2$ について $'=2x$ から求める方程式は

$y=2t\,(x-t)+t^2$ すなわち $\boldsymbol{y=2tx-t^2}$

(2) (1) で求めた接線が C_2 と接するのは

$-x^2+4ax-4a^2+4a^4=2tx-t^2$ が重解をもつときなので

$x^2+2\,(t-2a)\,x+4a^2-4a^4-t^2=0$ として

（判別式）$=0$ となるのは

$(t-2a)^2-(4a^2-4a^4-t^2)=0$ を解く

$2t^2-4at+4a^4=0$

$t^2-2at+2a^4=0 \cdots ①$

$a>0$ に対して ① が異なる 2 つの実数解をもつのは

（① の判別式）>0 から

$a^2-2a^4>0$

$a^2\,(2a^2-1)<0$

$a>0$ から $\boldsymbol{0<a<\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

(3) ① の異なる 2 つの実数解を α，β とすると解と係数の関係から

$\alpha+\beta=2a \cdots ②$，$\alpha\beta=2a^4 \cdots ③$

ℓ，ℓ' の方程式をそれぞれ $y=2\alpha x-\alpha^2$，$y=2\beta x-\beta^2$ としてよい。

ℓ，ℓ' の交点の x 座標は

$2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2$ を解いて

$2\,(\alpha-\beta)\,x=\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$\alpha-\beta \fallingdotseq -$ から $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=a$ $(\because ②)$

y 座標は ℓ 上の点として

$$y = 2\alpha \cdot \frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha^2 = \alpha\beta = 2a^4 \ (\because ③)$$

したがって，求める交点の座標は $\boldsymbol{(a\,,\,2a^4)}$

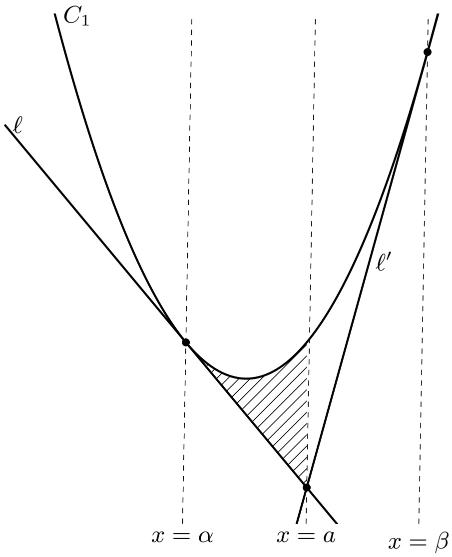
(4)　① の 2 つの解を，解の公式から $t = a \pm \sqrt{a^2 - 2a^4}$

(3) の α，β を用いて $\alpha < \beta$ とし，ℓ の方程式を $y = 2\alpha x - \alpha^2$ としても一般性を失わない。

このとき $\alpha = a - \sqrt{a^2 - 2a^4}$，$\beta = a + \sqrt{a^2 - 2a^4}$

$\alpha \leqq x \leqq a$ では $x^2 \geqq 2\alpha x - \alpha^2$ から

D_1 と D_2 の共通範囲は，下図の斜線部である。



$$\begin{aligned}
S(a) &= \int_\alpha^a \{x^2 - (2\alpha x) - \alpha^2\}\,dx \\
&= \int_\alpha^a (x-\alpha)^2\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^a \\
&= \frac{1}{3}(a-\alpha)^3
\end{aligned}$$

ここで

$$a - \alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha = \frac{\beta-\alpha}{2} = \sqrt{a^2 - 2a^4} \quad \text{から}$$

$$\boldsymbol{S(a) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{a^2 - 2a^4}\right)^3}$$