32　O，A，B は平面上の点で，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{7}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$ を満たすとする。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ として，以下の問いに答えよ。

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b} = 5$ を示せ。さらに △OAB の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(2\vec{a} - 3\vec{b}) = -1$ となるような平面上の点 P に対して，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最小値を求めよ。さらに，このときの $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とおく。$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ で $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot(2\vec{a} - 3\vec{b}) \geqq -\frac{1}{2}$ を満たす点 Q の存在範囲はどのような図形になるか。また，その面積を求めよ。〔三重大〕

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$ から，辺々平方して

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 1^2$$

$$|\vec{b}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{a} + |\vec{a}|^2 = 1$$

$$4 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 7 = 1$$

したがって $\vec{a}\cdot\vec{b} = 5$ が得られる。

また　$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{7\cdot4 - 5^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

◀ ベクトルで頻出の面積公式

(2)　平面上の点 P は，実数 α，β を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ とできる。

このとき，条件は

$$(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})\cdot(2\vec{a} - 3\vec{b}) = -1$$

$$2\alpha|\vec{a}|^2 - 3\alpha\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\beta\vec{b}\cdot\vec{a} - 3\beta|\vec{b}|^2 = -1$$

$$14\alpha - 15\alpha + 10\beta - 12\beta = -1$$

$\alpha = -2\beta + 1 \cdots ①$　とできる。

ここで

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = |\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}|^2$$

$$= \alpha^2|\vec{a}|^2 + 2\alpha\beta\vec{a}\cdot\vec{b} + \beta^2|\vec{b}|^2$$

$$= 7(-2\beta + 1)^2 + 10(-2\beta + 1)\beta + 4\beta^2$$

$$= 12\beta^2 - 18\beta + 7$$

$$= 12\left(\beta - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

β は任意の値をとるので，

$\beta = \frac{3}{4}$ のとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の**最小値は**$\sqrt{\frac{1}{4}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

① から $\alpha = -2\cdot\frac{3}{4} + 1 = -\frac{1}{2}$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ ⋯② としたとき，

条件 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot(2\vec{a} - 3\vec{b}) \geqq -\frac{1}{2}$ は左辺を (2) と同様にして

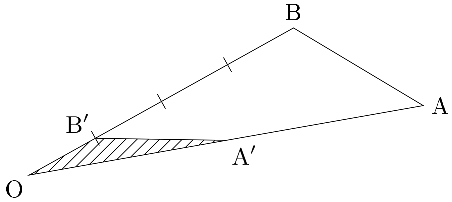
$$-s - 2t \geqq -\frac{1}{2} \quad \text{したがって}\ 2s + 4t \leqq 1 \cdots ③$$

$\frac{1}{2}\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\frac{1}{4}\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ を用いると ② を

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2s\left(\frac{1}{2}\vec{a}\right) + 4t\left(\frac{1}{4}\vec{b}\right) = 2s\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + 4t\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$$

とでき，$2s \geqq 0$，$4t \geqq 0$ および ③ から

Q は $\triangle\mathrm{OA'B'}$ の周および内部の点である。(下図の斜線部)



Q が存在する範囲の面積は

$$\triangle\mathrm{OA'B'} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\triangle\mathrm{OAB} = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

33 以下の問い に答えよ。

(1) k^2+2 が素数となるような素数 k をすべてみつけよ。また，それ以外にないことを示せ。

(2) 整数 ℓ が 5 で割りきれないとき，ℓ^4-1 が 5 で割り切れることを示せ。

(3) m^4+4 が素数となるような素数 m は存在しないことを示せ。〔お茶の水大〕

(1) $k=2$ のときは $k^2+2=6$ は素数ではない。
$k=3$ のとき $k^2+2=11$ は素数である。
$k>3$ のときの素数は 3 の倍数でないから，自然数 n を用いて $k=3n\pm1$ と表すことができる。このとき

$$\begin{aligned}k^2+2&=(3n\pm1)^2+2\\&=9n^2\pm6n+1+2\\&=3\left(3n^2\pm2n+1\right)\end{aligned}$$

右辺は 3 より大きい 3 の倍数であるから素数になり得ない。
求める素数 k は $\boldsymbol{k=3}$ のみ

◀ 2，3 以外の素数は $6m\pm1$ の形で表されることを知っていると早い。2，3 は別物で扱うことが多い

◀ 合同式を用いることができれば，もう少し簡潔に記述できる。

(2) 整数 ℓ が 5 の倍数でないとき，ℓ は整数 N を用いて，$5N\pm1$，$5N\pm2$ のいずれかの形で表される。

- $\ell=5N\pm1$ のとき

$$\ell^2=(5N\pm1)^2=5M+1\quad\left(M=5N^2\pm2N\right)$$
$$\ell^4=\left(\ell^2\right)^2=(5M+1)^2=25M^2+10M+1$$
$$\ell^4-1=5\left(5M^2+2M\right)$$

$5M^2+2M$ は整数なので ℓ^4-1 は 5 で割りきれる。

- $\ell=5N\pm2$ のとき

$$\ell^2=(5N\pm2)^2=5M-1\quad\left(M=5N^2\pm4N+1\right)$$
$$\ell^4=\left(\ell^2\right)^2=(5M-1)^2=25M^2-10M+1$$
$$\ell^4-1=5\left(5M^2-2M\right)$$

$5M^2-2M$ は整数なので ℓ^4-1 は 5 で割りきれる。

いずれの場合も ℓ^4-1 が 5 で割りきれることが示された。

◀ 合同式を用いた解の例
合同式の法を 5 とし
- $\ell\equiv\pm1$ のとき
$\ell^4-1\equiv1-1\equiv0$
- $\ell\equiv\pm2$ のとき
$\ell^4-1\equiv16-1\equiv0$
程度の記述になります。

(3) 素数 m が 5 以外のときは (2) から $m^4+4=m^2-1+5$ とでき，これは 5 の倍数，さらに $m^4+4\geqq2^4+4=21$ から
m^2+4 は 5 より大きい 5 の倍数なので素数にはなり得ない。
また，$m=5$ のとき $m^4+4=629=17\cdot37$ から素数ではない。
以上のことから m^4+4 が素数となる素数 m は存在しない。

◀「5 の倍数なので素数ではない」というのは誤り

◀ この素因数分解は自分で見つけるとなると結構大変

34　$0 \leqq \alpha \leqq \theta \leqq \pi$ とし，$\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$，$x = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ とする。

(1)　$\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$ の値を求めなさい。

(2)　x のとり得る値の範囲を求めなさい。

(3)　関数 $y = 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta - \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta + 3$ の最小値を求めなさい。　〔大分大〕

(1)　から $\sin\alpha \geqq 0$ より

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{4}^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$　であり

加法定理から

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{3} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{8}}$$

(2)　三角関数の合成を用いると $x = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$

ここで $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ のとき $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$ となるので $\dfrac{\pi}{3} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

◀ 単に α は鋭角程度でなく，有名角を用いてなるべく狭い範囲で絞る。

したがって $\dfrac{2}{3}\pi < \alpha + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{6}\pi \cdots$①

同様に $\alpha \leqq \theta \leqq \pi$ から $\alpha + \dfrac{\pi}{3} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{4}{3}\pi \cdots$②

①，② および $\alpha + \dfrac{\pi}{3} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{3}$ から

$$\frac{2}{3}\pi < \alpha + \frac{\pi}{3} \leqq \theta + \frac{\pi}{3} \leqq \frac{4}{3}\pi \cdots③$$

③ の範囲では $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ は単調減少なので

$$\sin\frac{4}{3}\pi \leqq \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) \leqq \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$$

すなわち $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right) \leqq \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{8}$

したがって $\boldsymbol{-\sqrt{3} \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}}$

(3)

$$x^2 = \sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta = 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta + 1$$

を用いると $y = x^2 - x + 2 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4}$ とでき

◀ 平方完成したからといって，すぐに最小値は $\dfrac{7}{4}$ としては，満点の評価は得られない。

(2) の結果で $\sqrt{15} > 3$，$\sqrt{3} > 1$ より $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} > 1$ から

$x = \dfrac{1}{2}$ となる x が存在するので，y の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{7}{4}}$