29 $\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\log_{10} 48$ を求めよ。

(2) $10^{0.84} < 7 < 10^{0.85}$ を示せ。 〔富山県立大〕

(1) $48 = 2^4 \cdot 3$ を用いると

$$\begin{aligned}\log_{10} 48 &= \log_{10}\left(2^4 \cdot 3\right)\\ &= 4\log_{10} 2 + \log_{10} 3\\ &= 4 \times 0.301 + 0.477\\ &= \mathbf{1.681}\end{aligned}$$

(2) $\log_{10}\sqrt{48} = \dfrac{1}{2}\log_{10} 48 = 0.8405$ （$\because$ (1)）

したがって $\sqrt{48} = 10^{0.8405} \cdots$ ①

$\log_{10} 50 = \log_{10}\dfrac{100}{2} = \log_{10} 100 - \log_{10} 2 = 2 - 0.301 = 1.699$

$\log_{10}\sqrt{50} = \dfrac{1}{2}\log_{10} 50 = 0.8495$ から $\sqrt{50} = 10^{0.8495} \cdots$ ②

$\sqrt{48} < \sqrt{49} < \sqrt{50}$ であり ①，② から

$10^{0.8405} < \sqrt{48} < 7 < \sqrt{50} < 10^{0.8495}$

そして $10^{0.84} < 7 < 10^{0.85}$ が示された。

30 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$a_1=2,\ (n+1)\,a_{n+1}=(n+3)\,a_n+2\ \ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{(n+2)(n+1)}$ とするとき，$b_{n+1}-b_n$ を n を用いて表せ。

(2) 次の等式が k についての恒等式となるように，定数 p の値を定めよ。

$$\frac{1}{(k+3)(k+2)(k+1)}=\frac{1}{p}\left\{\frac{1}{(k+2)(k+1)}-\frac{1}{(k+3)(k+2)}\right\}$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。〔鹿児島大〕

(1) $a_n=(n+2)(n+1)\,b_n$，$a_{n+1}=(n+3)(n+2)\,b_{n+1}$ を与えられた漸化式に代入すると

$$(n+1)(n+3)(n+2)\,b_{n+1}=(n+3)(n+2)(n+1)\,b_n+2$$

両辺 $(n+3)(n+2)(n+1)$ で割り

$$b_{n+1}=b_n+\frac{2}{(n+3)(n+2)(n+1)}$$

すなわち $\boldsymbol{b_{n+1}-b_n=\dfrac{2}{(n+3)(n+2)(n+1)}}$

(2)

$$(\text{右辺})=\frac{1}{p}\cdot\frac{(k+3)-(k+1)}{(k+3)(k+2)(k+1)}$$
$$=\frac{1}{p}\cdot\frac{2}{(k+3)(k+2)(k+1)}$$

これが左辺と恒等式となるのは $\boldsymbol{p=2}$

◀ 部分分数分解の応用形

(3) まず $b_1=\dfrac{a_1}{3\cdot2}=\dfrac{1}{3}$ である。
次に $n\geqq2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)$$

◀ 階差数列から一般項を求める基本式

$$=\frac{1}{3}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{(k+3)(k+2)(k+1)}\qquad(\because\ (1))$$
$$=\frac{1}{3}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(k+2)(k+1)}-\frac{1}{(k+3)(k+2)}\right)$$
$$=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3\cdot2}-\frac{1}{4\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{4\cdot3}-\frac{1}{5\cdot4}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{1}{n\,(n-1)}-\frac{1}{(n+1)\,n}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{(n+1)\,n}-\frac{1}{(n+2)(n+1)}\right)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot2}-\frac{1}{(n+2)(n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)(n+1)}$$
$$=\frac{(n+2)(n+1)-2}{2\,(n+2)(n+1)}$$

◀ $f(k)=\dfrac{1}{(k+2)(k+1)}$ と考えて

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(f(k)-f(k+1))$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n-1}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}f(k+1)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n-1}f(k)-\sum_{k=2}^{n}f(k)$

$=f(1)-f(n)$

$k=2$ から $k=n-1$ までは相殺される

$$= \frac{n(n+3)}{2(n+2)(n+1)}$$

これは $b_1 = \dfrac{1}{3}$ を満たす。

したがって $a_n = (n+2)(n+1)\, b_n = \boldsymbol{\dfrac{n(n+3)}{2}}$

31 a を定数とし，曲線 C ： $y=x(x-2)^2$ と直線 ℓ ： $y=ax$ を考える。C と ℓ は異なる 3 点で交わり，交点の x 座標はそれぞれ 0 以上とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

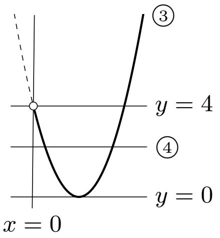
(2) C と ℓ とで囲まれた 2 つの図形の面積が等しくなるように a の値を定めよ。〔滋賀大〕

(1) $x(x-2)^2=ax\cdots$① を解く。$x=0$ は解の 1 つである。① が 0 以上の異なる 3 つの解をもつのは，① の両辺を $x\neq 0$ で割った $(x-2)^2=a\cdots$② が，正の異なる 2 つの解をもつことなので

$y=(x-2)^2\ (x>0)\ \cdots$③,

$y=a\cdots$④

を考えて ③，④ のグラフが 2 個の共有点をもつ範囲を求め $\mathbf{0<a<4}$



(2) (1) の範囲で ② の異なる 2 つの実数解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると ① の異なる 3 つの実数解は小さい順に 0，α，β となる。

このとき C と ℓ で囲まれた図形で

$0\leqq x\leqq\alpha$ の範囲にあるものの面積を S_1，

$\alpha\leqq x\leqq\beta$ の範囲にあるものの面積を S_2 とすると

$$S_1=\int_0^{\alpha}\left(x(x-2)^2-ax\right)dx,$$

$$S_2=\int_{\alpha}^{\beta}\left(ax-x(x-2)^2\right)dx$$

$S_1=S_2$ のとき

$$\int_0^{\alpha}\left(x(x-2)^2-ax\right)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left(ax-x(x-2)^2\right)dx$$

$$\int_0^{\alpha}\left(x(x-2)^2-ax\right)dx+\int_{\alpha}^{\beta}\left(x(x-2)^2-ax\right)dx=0$$

$$\int_0^{\beta}\left(x(x-2)^2-ax\right)dx=0$$

$$\int_0^{\beta}(x^3-4x^2+4x-ax)\,dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2-\frac{1}{2}ax^2\right]_0^{\beta}=0$$

$$\frac{1}{4}\beta^4-\frac{4}{3}\beta^3+2\beta^2-\frac{1}{2}a\beta^2=0$$

$\beta \fallingdotseq 0$ から

$$\frac{1}{4}\beta^2 - \frac{4}{3}\beta + 2 - \frac{1}{2}a = 0$$

$$3\beta^2 - 16\beta + 24 - 6a = 0 \cdots ⑤$$

さらに β は ② の解から $a = (\beta - 2)^2 \cdots ⑥$ を ⑤ に代入し

$$3\beta^2 - 16\beta + 24 - 6(\beta - 2)^2 = 0$$

$$-3\beta^2 + 8\beta = 0$$

$\beta \fallingdotseq 0$ から $\beta = \dfrac{8}{3}$ を ⑥ に代入し $\boldsymbol{a = \dfrac{4}{9}}$

◀ ⑥ を用いるタイミングによっては β についての方程式が異なる形になることもある。（正しく考えていれば，いずれの形でも $\beta = \dfrac{8}{3}$ が得られる。）
⑤ のような場合 β を消去するより，ひとまず a を消去する方がやりやすいと判断する