26 実数 x が，$\frac{3}{4}\pi < x < \pi$ および $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \frac{4}{3}$ をみたすとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\sin x + \cos x$ の値を求めよ。

(2) $\sin 2x + \cos 2x$ の値を求めよ。

(3) $\sin 3x + \cos 3x$ の値を求めよ。〔公立はこだて未来〕

(1) 条件式の両辺に $3\cos x \sin x$ をかけて

$$3(\sin x + \cos x) = 4\sin x \cos x \cdots ①$$

$t = \sin x + \cos x \cdots ②$ として，両辺を平方すると

$$t^2 = 1 + 2\sin x \cos x \quad \text{から} \quad \sin x \cos x = \frac{t^2-1}{2} \cdots ③$$

②，③ を ① に代入し

$$3t = 2(t^2-1)$$

$$2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$(2t+1)(t-2) = 0 \cdots ④$$

ここで ② は $t = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ であり $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$ のとき

$\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{5}{4}\pi$ から $t < 0$

④ から $t =$ **$\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$** $\cdots ⑤$

(2) $s = \sin x - \cos x \cdots ⑥$ とする。②，⑥ の辺々平方して加えると

$$t^2 + s^2 = 2$$

$$s^2 = 2 - t^2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \cdots ⑦$$

$\frac{3}{4}\pi < x < \pi$ のとき $\sin x > 0$ かつ $\cos x < 0$ から $s > 0$

⑦ から $s = \sin x - \cos x = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdots ⑧$

また，$\sin x \cos x = -\frac{3}{8} \cdots ⑨$ を準備して

$$\begin{aligned}\sin 2x + \cos 2x &= 2\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\sin x \cos x + (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) \\ &= -\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right) \quad (\because ⑨, ⑤, ⑧) \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}-3}{4}}\end{aligned}$$

◀ ここでは不要だが，$\sin x$ と $\cos x$ の和(t)と差(s)がわかるので，$\frac{1}{2}(t+s)$，$\frac{1}{2}(t-s)$ から $\sin x$，$\cos x$ の値を知ることができる。

(3) (2) で準備したものを引き続き用い，3 倍角の公式から

$$\begin{aligned}\sin 3x + \cos 3x &= (3\sin x - 4\sin^3 x) + (4\cos^3 x - 3\cos x) \\ &= 4(\cos^3 x - \sin^3 x) + 3(\sin x - \cos x) \\ &= 4(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x) \\ &\quad + 3(\sin x - \cos x)\end{aligned}$$

$$= 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{8}\right)+3\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

27 公平な大小各 1 枚の合計 2 枚のコインを投げることで，xy 平面上の任意の点 (x, y) においてある駒を動かす試行を行う。そのルールは，

- 大きなコインが表で小さなコインが表になったとき，駒を (x, y) から $(x+1, y)$ に動かす。
- 大きなコインが表で小さなコインが裏になったとき，駒を (x, y) から $(x, y+1)$ に動かす。
- 大きなコインが裏で小さなコインが裏になったとき，駒を (x, y) から $(x-1, y)$ に動かす。
- 大きなコインが裏で小さなコインが表になったとき，駒を (x, y) から $(x, y-1)$ に動かす。

いま，駒が原点 $(0, 0)$ においてあり，この試行を n 回繰り返したときに，駒が原点に戻る確率を P_n とし，n 回繰り返したときに，駒が初めて原点に戻る確率を Q_n とする。

(1) Q_4 を P_2 と P_4 を用いて表せ。

(2) Q_6 を P_2 と P_4 と P_6 を用いて表せ。

(3) Q_6 の値を求めよ。〔奈良教育大〕

(1) この反復試行で，駒が $(0, 0)$ にあるのは，偶数回目の試行が行われた後である。まず $P_2 = Q_2 \cdots ①$ である。

P_4 については，

- 2 回目終了後に駒が $(0, 0)$ にあり，4 回目終了後にも $(0, 0)$ にある。
- 4 回目終了後に初めて $(0, 0)$ にある

2 つの排反な和象の確率から

$$P_4 = Q_2 \times P_2 + Q_4 = {P_2}^2 + Q_4 \quad (\because ①)$$

したがって $\mathbf{Q_4 = P_4 - {P_2}^2}$

◀ 排反な和事象に分けると単純化される

(2) P_6 について

- 2 回目終了後に $(0, 0)$ にあり，その 4 回後にも $(0, 0)$ にある
- 4 回目終了後に初めて $(0, 0)$ にあり，その 2 回後にも $(0, 0)$ にある
- 6 回目終了後に初めて $(0, 0)$ にある

3 つの排反な和象の確率から

$$\begin{aligned} P_6 &= Q_2 \times P_4 + Q_4 \times P_2 + Q_6 \\ &= P_2P_4 + \left(P_4 - {P_2}^2\right) P_2 + Q_6 \ (\because ①, (1)) \\ &= -{P_2}^3 + 2P_2P_4 + Q_6 \end{aligned}$$

したがって $\mathbf{Q_6 = {P_2}^3 - 2P_2P_4 + P_6}$

(3) 駒の移動が $(x, y) \to (x+1, y)$，$(x, y) \to (x, y+1)$，$(x, y) \to (x-1, y)$，$(x, y) \to (x, y-1)$ に移動する事象をそれぞれ R，U，L，D とする。1 回の試行でこれらの事象が起

こる確率はそれぞれ $\frac{1}{4}$ である。

P_2 について

- R と L が 1 回ずつ
- U と D が 1 回ずつ

2 つの排反な和象の確率から

$$P_2=\frac{2!}{1!1!}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{2!}{1!1!}\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}\ \cdots②$$

P_4 について

- R と L が 2 回ずつ
- U と D が 2 回ずつ
- R，U，L，D が 1 回ずつ

3 つの排反な和象の確率から

$$\begin{aligned}P_4&=\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^4+\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^4+\frac{4!}{1!1!1!1!}\left(\frac{1}{4}\right)^4\\&=(6+6+24)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\\&=\frac{9}{64}\ \cdots③\end{aligned}$$

P_6 について

- R と L が 3 回ずつ
- U と D が 3 回ずつ
- R と L が 2 回ずつ，U と D が 1 回ずつ
- R と L が 1 回ずつ，U と D が 2 回ずつ

4 つの排反な和象の確率から

$$\begin{aligned}P_6&=\left(\frac{6!}{3!3!}+\frac{6!}{3!3!}+\frac{6!}{2!2!1!1!}+\frac{6!}{1!1!2!2!}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^6\\&=(20+20+180+180)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^6\\&=\frac{25}{256}\ \cdots④\end{aligned}$$

(2) の結果に ②，③，④ を代入して

$$\begin{aligned}Q_6&=\left(\frac{1}{4}\right)^3-2\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{64}+\frac{25}{256}\\&=\frac{4-18+25}{256}\\&=\boldsymbol{\frac{11}{256}}\end{aligned}$$

28 a を $a>0$，$a \fallingdotseq 1$ を満たす定数とし，2 つの 2 次関数

$$f(x)=x^2-x-a,\ g(x)=x^2-ax-1$$

を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)=0$ と $g(x)=0$ は共に 2 つの異なる実数解を持つことを示せ。

(2) $g(x)=0$ の 2 つの解のうち 1 つだけが $f(x)=0$ の 2 つの解の間にあることを示せ。

(3) 放物線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を $S(a)$，放物線 $y=g(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とする。$S(a)=T(a)$ となるときの a と $S(a)$ の値を求めよ。〔静岡大〕

(1) 方程式 $f(x)=0$ について

$$（判別式）=(-1)^2-4(-a)=1+4a>0 \quad (\because\ a>0)$$

したがって $f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもつ。

方程式 $f(g)=0$ について

$$（判別式）=(-a)^2-4(-1)=a^2+4>0$$

したがって $g(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもつ。

(2) $f(x)=0$ の 2 つの解を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とする。

解と係数の関係から $\alpha+\beta=1 \cdots$①，$\alpha\beta=-a \cdots$② である。

また，$\alpha^2-\alpha-a=0 \cdots$③，$\beta^2-\beta-a=0 \cdots$④ より

$$\alpha^2=\alpha+a \cdots ③',\ \beta^2=\beta+a \cdots ④' \quad とできて$$

◀ 次数を低くする常套手段

ここで

$$\begin{aligned} g(\alpha)&=\alpha^2-a\alpha-1 \\ &=\alpha+a-a\alpha-1 \quad (\because\ ③') \\ &=a(1-\alpha)-(1-\alpha) \\ &=(a-1)(1-\alpha) \end{aligned}$$

同様に $g(\beta)=(a-1)(1-\beta)$ となる。さらに

$$g(\alpha)\times g(\beta)=(a-1)^2(1-\alpha)(1-\beta) \quad であり$$

$a \fallingdotseq 1$ から $(a-1)^2>0$

$$\begin{aligned} また\quad (1-\alpha)(1-\beta)&=1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta \\ &=-a \quad (\because\ ①, ②) \\ &<0 \quad (\because\ a>0) \end{aligned}$$

◀ $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ を利用し $(1-\alpha)(1-\beta)$ $=f(1)=1-1-a=-a$ とできると計算はほとんど必要ない

したがって $g(\alpha)\times g(\beta)<0$ となり，中間値の定理から 2 次方程式 $g(x)=0$ は $\alpha<x<\beta$ にただ 1 つの解をもつことが示された。

(3) あらためて $f(x)=0$ の 2 つの解を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とする。

解の公式から $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

同様に $g(x)=0$ の 2 つの解を γ，$\delta\ (\gamma<\delta)$ とすると

$\gamma = \dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$，$\delta = \dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$

そして $\alpha \leqq x \leqq \beta$ では $f(x) \leqq 0$ から

$$\begin{aligned} S(a) &= -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -\frac{-1}{6}(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6}(\sqrt{1+4a})^3 \cdots ⑤ \end{aligned}$$

◀ いわゆる $\dfrac{1}{6}$公式

$\gamma \leqq x \leqq \delta$ では $g(x) \leqq 0$ から

$$\begin{aligned} T(a) &= -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \\ &= -\int_{\gamma}^{\delta} (x-\gamma)(x-\delta)\,dx \\ &= -\frac{-1}{6}(\delta-\gamma)^3 \\ &= \frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2+4}\right)^3 \end{aligned}$$

$S(a) = T(a)$ であるとき

$$1+4a = a^2+4$$

$$a^2-4a+3=0$$

$$(a-1)(a-3)=0$$

$a \fallingdotseq 0$ から $\boldsymbol{a=3}$

⑤ に代入し $S(a) = S(3) = \dfrac{1}{6}\left(\sqrt{1+12}\right)^3 = \boldsymbol{\dfrac{13\sqrt{13}}{6}}$