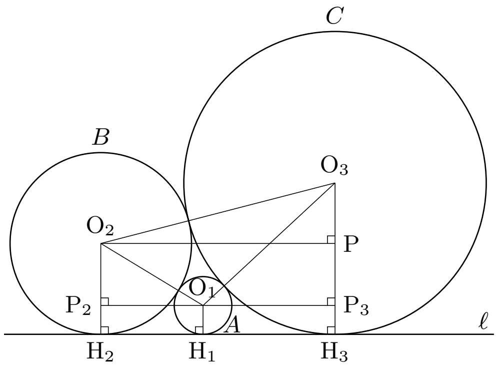
23 平面上に半径がそれぞれ a^2，b^2，c^2 $(0<a<b<c)$ の 3 つの円 A，B，C および直線 ℓ がある。3 つの円はどれも直線 ℓ に接していて，どの 2 つの円も外接しているとする。

(1) c を a と b を用いて表せ。

(2) 数列 a, b, c が等比数列となるとき，その公比を求めよ。〔千葉大〕

(1) ℓ，と A，B，C の位置関係は下図のようになる。

◀ この位置関係を思い浮かべられないと話が進まない。
（この位置関係しかないということを証明できればさらによいが . . .）



A，B，C の中心をそれぞれ $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$，$\mathrm{O_3}$ とする。
$\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$，$\mathrm{O_3}$ から ℓ への垂線の足をそれぞれ $\mathrm{H_1}$，$\mathrm{H_2}$，$\mathrm{H_3}$ とし，
さらに $\mathrm{O_1}$ から $\mathrm{O_2H_2}$ への垂線の足を $\mathrm{P_2}$，$\mathrm{O_1}$ から $\mathrm{O_3H_3}$ への垂線の足を $\mathrm{P_3}$，$\mathrm{O_2}$ から $\mathrm{O_3H_3}$ への垂線の足を P とする。
$\triangle\mathrm{O_1O_2P_2}$ について，三平方の定理から

$$\begin{aligned}\mathrm{O_1P_2} &= \sqrt{\mathrm{O_1O_2}^2-\mathrm{O_2P_2}^2}\\ &= \sqrt{(b^2+a^2)^2-(b^2-a^2)^2}\\ &= \sqrt{4a^2b^2}\\ &= 2ab\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{O_1O_3P_3}$，$\triangle\mathrm{O_2O_3P}$ についても同様に

$$\mathrm{O_1P_3}=2ac,\ \mathrm{O_2P}=2bc$$

$\mathrm{H_2H_3}=\mathrm{H_1H_2}+\mathrm{H_1H_3}$ から $\mathrm{O_2P}=\mathrm{O_1P_2}+\mathrm{O_1P_3}$ すなわち

$$2bc=2ab+2ac$$

$(b-a)\,c=ab\cdots①$ から $\boldsymbol{c=\dfrac{ab}{b-a}}$

(2) 公比を r とすると $r>1$ であり，$b=ar$，$c=br=ar^2$ とでき
① に代入すると

$(ar-a)\,ar^2=a\cdot ar$ 両辺 $a^2r\fallingdotseq 0$ で割り

$(r-1)\,r=1$

$r^2-r-1=0$ $r>1$ から $\boldsymbol{r=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

24 空間内に，同一平面上にない 4 点 O，A，B，C がある。s，t を $0<s<1$，$0<t<1$ をみたす実数とする。線分 OA を $1:1$ に内分する点を $\mathrm{A_0}$，線分 OB を $1:2$ に内分する点を $\mathrm{B_0}$，線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。さらに 4 点 $\mathrm{A_0}$，$\mathrm{B_0}$，P，Q が同一平面上にあるとする。

(1) t を s を用いて表せ。

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=1$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=2$, $\angle\mathrm{AOB}=120^\circ$, $\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$, $\angle\mathrm{COA}=60^\circ$, $\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ であるとき，s の値を求めよ。〔大阪大〕

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ …①，$\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ …②，
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ …③，
$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ …④ である。

このとき ③ $\times t-$ ④ $\times s$ から

$$t\overrightarrow{\mathrm{OP}}-s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}-s(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=2t(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}-3s(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}\ (\because ①,②)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}-\frac{3s}{t}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}+\frac{s}{t}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ となり

4 点 $\mathrm{A_0}$，$\mathrm{B_0}$，P，Q が同一平面上にあるとき

$2(1-s)-\frac{3s}{t}(1-t)+\frac{s}{t}=1$ となるので

$$2t(1-s)-3s(1-t)+s=t$$

$$t-2s+ts=0$$

$(s+1)t=2s$　$s+1\neq 0$ から $\boldsymbol{t=\frac{2s}{s+1}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1\cdot2\cdot\cos120^\circ=-1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1\cdot2\cdot\cos60^\circ=1$，
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ である。$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ であり，

③，④ を用いると

$$\{(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}\}\cdot\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\}=0$$

$$-(1-s)(1-t)+(1-s)t+4st=0$$

$$2st+s+2t-1=0$$

$$2t(s+1)+s-1=0$$

$$4s+s-1=0\quad(\because (1))$$

$$\boldsymbol{s=\frac{1}{5}}$$

◀ 一般論で 4 点 A，B，C，D が同一平面上にあるとき
【方法 1】 任意の 1 点を基点とし，他の 3 点の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を考えたとき
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 β，γ が存在する。
【方法 2】 任意の 1 点の位置ベクトルを，他の 3 点の実数倍の和で表したとき，すなわち実数 s，t，u を用いて
$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表されたとき
$s+t+u=1$ が成り立つ。

25 関数 $f(x)$ は等式 $f(x)=3x^2+\int_0^2 xf(t)\,dt+\int_{-1}^1 f(t)\,dt$ を満たす。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $g(x)=xf(x)+x$ の区間 $-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\sqrt{3}$ における最大値と最小値を求めよ。

〔山梨大〕

(1) $f(x)=3x^2+x\int_0^2 f(t)\,dt+\int_{-1}^1 f(t)\,dt\cdots$① とできる。

① の右辺の定積分はいずれも定数なので

$\int_0^2 f(t)\,dt=a\cdots$②, $\int_{-1}^1 f(t)\,dt=b\cdots$③　とでき

◀ 積分区間の両端が定数である定積分の値は定数

① から $f(x)=3x^2+ax+b\cdots$④ とできる。④ を用いると

② は

$$\begin{aligned}a&=\int_0^2(3x^2+ax+b)\,dt\\&=\left[x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^2\\&=8+2a+2b\end{aligned}$$
となり $a+2b+8=0\cdots$⑤

③ は

$$\begin{aligned}b&=\int_{-1}^1(3x^2+ax+b)\,dt\\&=2\int_0^1(3x^2+b)\,dt\\&=2\left[x^3+bx\right]_0^1\\&=2+2b\end{aligned}$$
となり $b+2=0\cdots$⑥

⑤，⑥ を解いて $(a,b)=(-4,-2)$

④ に代入し $\mathbf{3x^2-4x-2}$

(2) (1) の結果から $g(x)=xf(x)+x=3x^3-4x^2-x$ であり

$g'(x)=9x^2-8x-1=(x-1)(9x+1)$

$-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\sqrt{3}$ で $g'(x)=0$ となるのは $x=-\frac{1}{9},1$ であり

増減表は

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{9}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	極大	↘	極小	↗	

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}-1+\frac{1}{2}=-\frac{7}{8}$

$g(1)=3-4-1=-2$

$$g\left(-\frac{1}{9}\right)=-\frac{1}{243}-\frac{4}{81}+\frac{1}{9}=\frac{14}{243}$$

$$g(\sqrt{3})=9\sqrt{3}-12-\sqrt{3}=8\sqrt{3}-12$$

ここで

$$g\left(-\frac{1}{2}\right)>g(1)\ \cdots ⑦$$

また $\sqrt{3}>1.7$ より $8\sqrt{3}-12>8\cdot1.7-12=1.6>1$ であり

$$g\left(-\frac{1}{9}\right)<1<g(\sqrt{3})\ \cdots ⑧$$

増減表および ⑦，⑧ より

最大値 $8\sqrt{3}-12$ $(x=\sqrt{3})$，最小値 -2 $(x=1)$