20 p，q を実数とする。点 O を原点とする座標空間において，4 点

A$(1,\ 1,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 6)$，D$(p,\ q,\ 1)$

をとる。3 点 A，B，C を含む平面を α とし，$\angle$AOD の大きさを θ とし，$\triangle$AOD の面積を S とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) $\cos\theta$ を，p と q を用いて表せ。

(2) 面積 S を，p と q を用いて表せ。

(3) 点 D が平面 α 上を動くとき，面積 S の最小値を求めよ。〔宮崎大〕

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \sqrt{2}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right| = \sqrt{p^2+q^2+1}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = p+q$ から

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|} = \boldsymbol{\frac{p+q}{\sqrt{2\left(p^2+q^2+1\right)}}}$$

◀ 内積の定義から基本問題

(2) ベクトルの面積公式から

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2\left(p^2+q^2+1\right)-(p+q)^2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{p^2-2pq+q^2+2}}$$

◀（覚えづらいが）平面ベクトルでも用いることができる便利な公式

(3) 点 D が平面 α 上にあるとき，実数 $s,\ t,\ u$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\,\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (s,\ s+2t,\ 6u)$$ とできる

ただし $s+t+u=1 \cdots ①$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (p,\ q,\ 1)$ から $p=s$，$q=s+2t$，$1=6u$ である。

$u=\frac{1}{6}$ となり ① から $s+t=\frac{5}{6} \cdots ②$

さらに (2) の結果から

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(q-p)^2+2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{((s+2t)-s)^2+2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{4t^2+2}$$

◀ 単純な形で平方完成したのち代入
代入してから平方完成するより早い（今回は差が出ない）

したがって S は $t=0$ すなわち $(s,\ t,\ u)=\left(\frac{5}{6},\ 0,\ \frac{1}{6}\right)$ のとき

最小値 $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ をとる。

21 中の見えない 2 つの袋 A，B があり，どちらにも赤球 1 個と白球 1 個が入っている。この 2 つの袋から同時に 1 個ずつ球を取り出して他方の袋に入れるという試行を繰り返す。n 回の試行の後に最初と同じになる確率を a_n，そうでない確率を b_n とするとき，次の問に答えよ。

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(3) a_n を n を用いて表せ。〔香川大〕

(1) a_1 について，1 回目に

- A と B からともに赤球を取り出す確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
- A と B からともに白球を取り出す確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

上記のいずれかしかなく互いに排反なので，

$$a_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

a_2 について 1 回目が終了後，a_1 の結果から

- 赤球，白球 1 個ずつのとき a_1 と同様な計算で $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
- 上記以外すなわち 2 球とも同色のとき $\left(1-\frac{1}{2}\right)\times 1=\frac{1}{2}$

◀ A，B どちらも同色であれば，次は必ずそれぞれ赤球，白球 1 個ずつになる

上記のいずれかしかなく互いに排反なので，

$$a_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

a_3 について 2 回目が終了後，a_2 の結果から

- 赤球，白球 1 個ずつのとき a_1 と同様な計算で $\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$
- 上記以外すなわち 2 球とも同色のとき $\left(1-\frac{3}{4}\right)\times 1=\frac{1}{4}$

上記のいずれかしかなく互いに排反なので，

$$a_2=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{5}{8}}$$

(2) (1) の考察から

◀ (1) で総当たりでなく，規則性を考えるようにすると即答できる

$$\boldsymbol{a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+b_n}$$

(3) (2) において $a_n+b_n=1$ を用いると

$$\begin{cases} a_1=\frac{1}{2} \cdots ① \\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1-a_n=-\frac{1}{2}a_n+1 \cdots ② \end{cases}$$

◀ 隣接 2 項間漸化式(基本)

とでき，② は $a_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$ とでき，

数列 $\left\{a_n-\frac{2}{3}\right\}$ は

初項 $a_1 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列となるので

$$a_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

したがって $\boldsymbol{a_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

22 正の実数 x，y が，方程式

$$\frac{9^{4x}+9^{y^2+1}}{6}=3^{4x+y^2}\quad\cdots\ (*)$$

を満たすとする。

(1) y^2 を x を用いて表せ。

(2) 正の実数 x，y が $(*)$ および $1-\dfrac{x}{y}>0$ を満たしながら動くとき，

$$\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}$$

の最大値を求めよ。

〔北海道〕

(1) $3^{4x}=X$，$3^{y^2}=Y$ とすると

$$9^{4x}=(3^2)^{4x}=(3^{4x})^2=X^2$$

$$9^{y^2}=(3^2)^{y^2}=\left(3^{y^2}\right)^2=Y^2\quad \text{から}$$

$$9^{y^2+1}=9^{y^2}\cdot 9^1=9Y^2$$

$$3^{4x+y^2}=3^{4x}\cdot 3^{y^2}=XY$$

を用いると $(*)$ は $\dfrac{X^2+9Y^2}{6}=XY$ とでき

$$X^2+9Y^2=6XY$$

$$(X-3Y)^2=0\quad \text{から}\ X=3Y$$

$$3^{4x}=3\cdot 3^{y^2}=3^{1+y^2}$$

$4x=1+y^2$ から $\boldsymbol{y^2=4x-1}$

(2)

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\log_4\left(1+\frac{x}{y}\right)+\log_4 1-\frac{x}{y}\\&=\log_4\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{x}{y}\right)\\&=\log_4\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\end{aligned}$$

（与式）が最大となるのは，底の 4 は 1 より大きいので，真数が最大となるときである。

したがって $\dfrac{x^2}{y^2}$ が最小となることを考える。$P=\dfrac{x^2}{y^2}$ とする。

(1) から

$$\begin{aligned}P&=\frac{x^2}{4x-1}\\&=\frac{\left(\frac{t+1}{4}\right)^2}{t}\qquad (4x-1=t\ \text{とした}(t=y^2>0))\end{aligned}$$

◀ 分母を単項式とする方が変形しやすい

$$= \frac{t + 2 + \frac{1}{t}}{16}$$

そして $t > 0$，$\frac{1}{t} > 0$ であり相加相乗平均の関係から

$$t + \frac{1}{t} \geqq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2 \quad \text{であり}$$

等号が成立するのは $t = \frac{1}{t} = 1$ のときで $t = 1$ のとき

このとき $y^2 = 1$ で $y > 0$ から $y = 1$，$4x - 1 = 1$ から $x = \frac{1}{2}$ となり $1 - \frac{x}{y} > 0$ を満たす。

したがって P の最小値は $\frac{2+2}{16} = \frac{1}{4}$ から（与式）の最大値は

$$\log_4 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{\log_4 \frac{3}{4}} \quad \boldsymbol{(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)}$$