17 xy 平面上の x 座標と y 座標が共に正の整数である点 (x, y) 全体の集合を D とする。D に属する点 (x, y) に対して $x+y$ が小さいものから順に，また $x+y$ が等しい点の中では x が小さい順に番号をつけ，n 番目 $(n=1, 2, 3, \cdots)$ の点を P_n とする。例えば，P_1，P_2，P_3 の座標は順に $(1, 1)$，$(1, 2)$，$(2, 1)$ である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 座標が $(2, 4)$ である点は何番目か。また，P_{10} の座標を求めよ。

(2) 座標が (n, n) である点の番号を a_n とする。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) (2) で定めた数列 $\{a_n\}$ に対し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

〔岡山大〕

(1) D に属する点を列挙すると

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1),$$
$$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 5), (2, 4), \cdots$$

$(2, 4)$ は **12 番目の点**，P_{10} の座標は $\boldsymbol{(4, 1)}$

◀ 一般式を求めてもよいが，この程度なら間違わず列挙した方が早い

(2) x 座標と y 座標の和で分類する。(n, n) は座標の和が $2n$ である点のなかで n 番目の点となる。

$n \geqq 2$ のとき和が 2 の点は 1 個，和が 3 の点は 2 個，$\cdots$，和が $2n-1$ の点は $2n-2$ 個あるので (n, n) は

◀ 手前の群がないときは，一緒の計算にはできない

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+(2n-2)+n &= \frac{1}{2}(2n-2)(2n-1)+n \\ &= (n-1)(2n-1)+n \\ &= 2n^2-2n+1 \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも満たす。したがって $\boldsymbol{a_n = 2n^2-2n+1}$

(3) (2) の結果を用いて

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} (2k^2-2k+1) \\ &= 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n \\ &= \frac{1}{3}n\{(n+1)(2n+1)-3(n+1)+3\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(2n^2+1)} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{18}}$ xy 平面上の点 A，B，C の座標はそれぞれ $(1,1)$，$(3,1)$，$(2,3)$ である。三角形 ABC の内部および境界で与えられる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) 領域 D を図示し，不等式を用いて表せ。

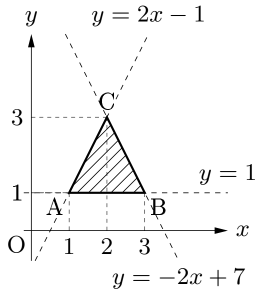
(2) 点 (x,y) が領域 D 内を動くとき，$4x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

(3) 点 (x,y) が領域 D 内を動くとき，$\sqrt{x^2+y^2}$ の最大値と最小値を求めよ。 〔長崎大〕

(1) D は右図の境界を含む斜線部の部分

D を表す連立不等式は

$$\begin{cases} y \geqq 1 \\ y \leqq 2x-1 \\ y \leqq -2x+7 \end{cases}$$



(2) $4x+y=k$ とおく。$y=-4x+k \cdots$ ① とでき，

① は傾き -4，y 切片が k の直線である。

① が領域 D と共有点をもつように動くとき，BC の傾きが -2 であることを考えると

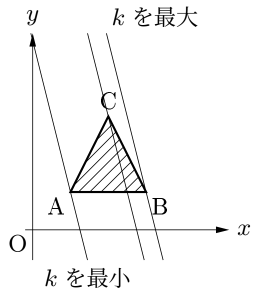
k が最大となるのは ① が $\mathrm{B}(3,1)$ を通るときで，

k が最小となるのは ① が $\mathrm{A}(1,1)$ を通るときである。

したがって

最大値 13 $(x,y)=(3,1)$，

最小値 5 $(x,y)=(1,1)$



(3) $\sqrt{x^2+y^2}=r>0$ とおく。$x^2+y^2=r^2 \cdots$ ② とでき，

② は中心 $\mathrm{O}(0,0)$，半径 r の円である。

② が領域 D と共有点をもつように動くとき r を考えると

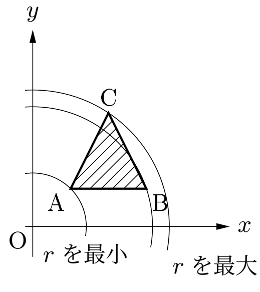
r が最大となるのは ② が B または C を通るときであり，

$\mathrm{OB}^2=3^2+1^2=10$，$\mathrm{OC}^2=2^2+3^2=13$ から C を通るとき最大であることがわかる。

r が最小となるのは ② が点 A を通るときから

最大値 $\sqrt{13}$ $(x,y)=(2,3)$，

最小値 $\sqrt{2}$ $(x,y)=(1,1)$



19　$f(x)=|x^3-3x|$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　x についての方程式 $f(x)=k$ が異なる実数解をちょうど 4 個もつような実数 k の値を求めよ。

(2)　x についての方程式 $f(x)=ax$ が異なる実数解をちょうど 3 個もつような実数 a の値の範囲を求めよ。

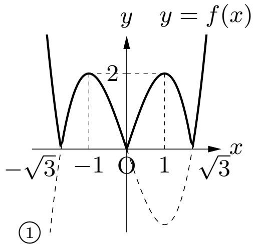
(3)　正の実数 a は (2) の条件を満たすとする。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように，a の値を定めよ。　〔和歌山大〕

$y=x^3-3x\cdots$① について，① のグラフの $y<0$ の部分を x 軸について折り返したものが $y=f(x)$ のグラフとなる。

$y=x(x^2-3)$，$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ から増減表は

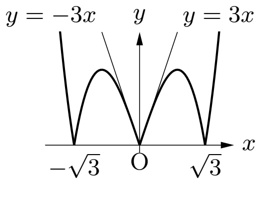
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y	$+$	0	$-$	0	$+$
y'	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

グラフは右図のようになる。



(1)　$y=f(x)$，$y=k$ の 2 つのグラフが 4 個の共有点をもつのは
$k=2$

(2)　① について $x=0$ のとき
$y'=-3$ から
$y=f(x)$，$y=3x$，$y=-3x$
のグラフを描いて考えると
$y=ax$ は原点 $(0,0)$ を通る傾き a の直線なので



- $a>0$ のとき $y=ax$ と $y=f(x)$ のグラフは $0<a<3$ のとき 3 個の共有点をもつ。

- $a=0$ のとき $y=ax$ $(y=0)$ と $y=fx(x)$ のグラフは 3 個の共有点をもつ。

- $a<0$ のとき $y=ax$ と $y=f(x)$ のグラフは $-3<a<0$ のとき 3 個の共有点をもつ。

したがって求める範囲は **$-3<a<3$**

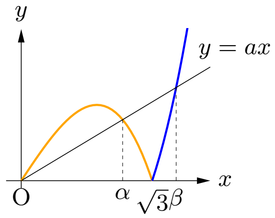
(3)　説明のため $g(x)=x^3-3x$ とする。

$0<x<\sqrt{3}$ で

$y=-g(x)$ と $y=ax$ との交点の x 座標は

$-x^3+3x=ax$　を解いて

$x^2=3-a$　$(\because\ x\fallingdotseq 0)$



◀ オレンジ色は $y=-g(x)$
青色は $y=g(x)$

$x=\sqrt{3-a}$　$\left(\because\ 0<x<\sqrt{3},\ 0<a<3\right)$

この値を $\alpha=\sqrt{3-a}$ とする。

同様に $\sqrt{3}<x$ で $y=g(x)$ と $y=ax$ との交点の x 座標は

$x^3-3x=ax$　を解いて

$x^2=a+3$　$(\because\ x\fallingdotseq 0)$

$x=\sqrt{a+3}$　$\left(\because\ x>\sqrt{3}\right)$

この値を $\beta=\sqrt{a+3}$ とする。

条件から

$$\int_0^{\alpha}(-g(x)-ax)\,dx=\int_{\alpha}^{\sqrt{3}}(ax-(-g(x)))\,dx+\int_{\sqrt{3}}^{\beta}(ax-g(x))\,dx$$

$$\int_0^{\alpha}(-g(x)-ax)\,dx-\int_{\alpha}^{\sqrt{3}}(ax+g(x))\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\beta}(ax-g(x))\,dx$$

$$\int_0^{\sqrt{3}}(-g(x)-ax)\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\beta}(ax-g(x))\,dx$$

$$\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}ax^2\right]_0^{\sqrt{3}}=\left[\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_{\sqrt{3}}^{\beta}$$

$$-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}-\frac{3}{2}a=\frac{1}{2}a\,(a+3)-\frac{1}{4}(a+3)^2+\frac{3}{2}\,(a+3)-\left(\frac{3}{2}a-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}\right)$$

$$9-6a=2a\,(a+3)-(a+3)^2+6\,(a+3)-(6a+9)$$

$$a^2+6a-9=0$$

$0<a<3$ より $\boldsymbol{a=-3+3\sqrt{2}}$