14 数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 4$，公差 d の等差数列であり，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 2$，公比 r の等比数列であるとする。数列 $\{c_n\}$ は $c_1 = 2$，$c_2 = 2$，$c_3 = -6$，$c_4 = -38$ という条件と $c_n = a_n - b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ という条件の両方によって与えられるとする。

(1) 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めなさい。

(2) 数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めなさい。

(3) 数列 $\{d_n\}$ が $d_n = \dfrac{1}{2}(4n - c_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ という条件によって与えられ，数列 $\{e_n\}$ が $e_n = \dfrac{1}{27}(2n^2 + 2n + 1 - S_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ という条件によって与えられるとする。自然数 ℓ，m についての連立方程式

$$\begin{cases} 3\log_3 d_\ell + 2\log_3 e_m = 5 \\ 2\log_3 d_\ell - \log_3 e_m = 8 \end{cases}$$

を満足する ℓ，m を求めなさい。〔埼玉大〕

$a_n = 4 + (n-1)d$，$b_n = 2r^{n-1}$ とできる。

(1) $c_n = a_n - b_n$ より

$c_2 = 2$ から $4 + d - 2r = 2$ となり $d - 2r = -2 \cdots$ ①

$c_3 = -6$ から $4 + 2d - 2r^2 = -6$ となり $2d - 2r^2 = -10 \cdots$ ②

$c_4 = -38$ から $4 + 3d - 2r^3 = -38$ となり $3d - 2r^3 = -42 \cdots$ ③

② $\times 2 -$ ② から

$2r^2 - 4r = 6$ となり $2r^2 - 4r - 6 = 0$

$r^2 - 2r - 3 = 0$ を解いて $(r+1)(r-3) = 0$

① から $(d, r) = (-4, -1), (4, 3)$,

③ を満たすのは $(d, r) = (4, 3)$

したがって $c_n = 4 + (n-1)\cdot 4 + 2\cdot 3^{n-1} = \mathbf{4n - 2\cdot 3^{n-1}}$

◀ ①，② だけでなく，③ の条件も吟味する

(2)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(4k - 2\cdot 3^{k-1}\right)$$
$$= 4\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - 2\cdot\frac{3^n - 1}{3 - 1}$$
$$= \mathbf{2n^2 + 2n - 3^n + 1}$$

◀ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\cdot 3^k$ は初項 2，公比 3，項数 n の等比数列の和

(3) (1)，(2) から $d_n = 3^{n-1}$，$e_n = \dfrac{1}{27}\cdot 3^n = 3^{n-3}$ である。

また，$\log_3 d_\ell = x$，$\log_3 e_m = y$ とすると，

与えられた連立方程式は $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$ となり，

これを解いて $(x, y) = (3, -2)$ である。そして，

$$\log_3 d_\ell = \log_3 3^{\ell-1} = \ell - 1,\ \log_3 e_m = \log_3 3^{m-3} = m - 3$$

から $\mathbf{(\ell, m) = (4, 1)}$ となり，ℓ および m は整数を満たす。

◀ 見かけは仰々しくても単なる連立 1 次方程式

15 a を正の定数とする。放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a$ の両方に接する直線を ℓ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 の共有点の x 座標を a を用いて表せ。

(2) ℓ の方程式を求めよ。

(3) C_1，C_2，および ℓ で囲まれた図形の面積を a を用いて表せ。 〔滋賀大〕

(1) $x^2 = x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a$ を解く

$4ax = 4a^2 - 4a$ の両辺 $4a \fallingdotseq 0$ で割り $\boldsymbol{x = a - 1}$

(2) C_1 について $y' = 2x$ であり，

C_1 上の点 (t, t^2) における接線の方程式は

$y = 2t(x - t) + t^2 = 2tx - t^2 \cdots ①$

① が C_2 と接するのは

◀ C_1 の（任意の）接線と C_2 の（任意の）接線が一致すると考えてもよい。

$2tx - t^2 = x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a$ とし

$x^2 - 2(2a + t)x + 4a^2 - 4a + t^2 = 0 \cdots ②$ の

（判別式）$= 0$ ときであるから

$(2a + t)^2 - (4a^2 - 4a + t^2) = 0$ を解く

$4at + 4a = 0$

$4a(t + 1) = 0$ となり $a \fallingdotseq 0$ から $t = -1$

① に代入し，ℓ の方程式は $\boldsymbol{y = -2x - 1}$

(3) C_1 と ℓ との接点の x 座標は

$x^2 = -2x - 1$ を解いて $x^2 + 2x + 1 = 0$

$(x + 1)^2 = 0$ したがって $x = -1$

C_2 と ℓ との接点の x 座標は

$x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a = -2x - 1$ を解いて

$x^2 - 2(2a - 1)x + 4a^2 - 4a + 1 = 0$

$(x - (2a - 1))^2 = 0$ したがって $x = 2a - 1$

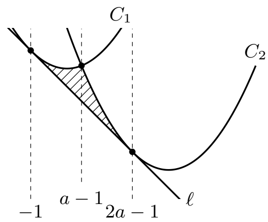
求める面積は

(1) の交点の x 座標を考え $-1 < a - 1 < 2a - 1$ から

$-1 \leqq x \leqq a - 1$ では C_1 と ℓ ではさまれた部分の面積を S_1

$a - 1 \leqq x \leqq 2a - 1$ では C_2 と ℓ ではさまれた部分の面積を S_2

求める面積は

◀ 

$S_1 + S_2$

$= \displaystyle\int_{-1}^{a-1} \{x^2 - (-2x - 1)\}\, dx$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \int_{a-1}^{2a-1} \{(x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a) - (-2x - 1)\}\,dx \\
&= \int_{-1}^{a-1} (x+1)^2\,dx + \int_{a-1}^{2a-1} (x - (2a-1))^2\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{a-1} + \left[\frac{1}{3}(x-(2a-1))^3\right]_{a-1}^{2a-1} \\
&= \frac{1}{3}a^3 - 0 + 0 - \frac{1}{3}(-a)^3 \\
&= \boldsymbol{\frac{2}{3}a^3}
\end{aligned}
$$

◀ 放物線と直線または放物線と放物線が接しているときの面積は $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-p)^2\,dx$ を計算することになる。
被積分関数を展開するのでなく $\left[\dfrac{1}{3}(x-p)^3\right]_\alpha^\beta$ とできるように

16 △ABC において，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c で表し，∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C で表す。次の問いに答えなさい。

(1) $b=7$，$c=5$，$\cos A=\dfrac{1}{7}$ であるとき，△ABC の外接円の半径 R を求めなさい。

(2) $b=2c$，$\cos A=\dfrac{1}{4}$ のとき，$\sin A:\sin B:\sin C$ を求めなさい。

(3) $b=6$，$c=2$ であり，$6\cos C-2\cos B=a$ が成り立つとき，B と a の値をそれぞれ求めなさい。

〔秋田大〕

(1) 余弦定理から

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=7^2+5^2-2\cdot7\cdot5\cdot\frac{1}{7}=64$$

$a>0$ より $a=8$ である。

また，$\sin A>0$ より $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{\dfrac{48}{49}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

正弦定理から

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{8}{2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}}=\frac{7}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}}{3}}$$

(2) 余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ に条件を代入すると

$$a^2=(2c)^2+c^2-2\cdot2c\cdot c\cdot\frac{1}{4}=4c^2$$

$a>0$，$c>0$ から $a=2c$ となる。

また，正弦定理から $\sin A=\dfrac{a}{2R}$ 等を用いると

$$\begin{aligned}\sin A:\sin B:\sin C&=\frac{a}{2R}:\frac{b}{2R}:\frac{c}{2R}\\&=a:b:c\\&=2c:2c:c\\&=\mathbf{2:2:1}\end{aligned}$$

◀ すべての三角形について $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

(3) 条件式

$$6\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-2\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=a \quad に$$

$b=6$，$c=2$ を代入すると

$$\frac{a^2+36-4}{2a}-\frac{4+a^2-36}{2a}=a$$

$$a^2+32-(a^2-32)=2a^2$$

$a^2=32$ であり $a>0$ から $\boldsymbol{a=4\sqrt{2}}$

また，このとき $a^2+c^2=b^2$ となり，三平方の定理の逆から

$\boldsymbol{B=90^\circ}$