10 2 次方程式 $x^2-2x+4=0$ の 2 つの解を α，β とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 多項式 x^3+8 を実数を係数とする 1 次式と 2 次式の積に因数分解しなさい。

(2) $\alpha^2+\beta^2$ の値を求めなさい。

(3) $\alpha^3+\beta^3$ の値を求めなさい。

(4) $\alpha^{10}+\beta^{10}$ の値を求めなさい。 〔福島大〕

(1) 因数分解の公式から

$$x^3+8=\boldsymbol{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

◀ 忘れたら実際に割り算する

-2	1	0	0	8
		-2	4	-8
	1	-2	4	0

(2) 解と係数の関係から $\alpha+\beta=2\cdots$①，$\alpha\beta=4\cdots$② を用いて

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=2^2-2\cdot4\\&=\boldsymbol{-4}\end{aligned}$$

(3) (1) より α は $x^3+8=0$ の解でもあるので

$\alpha^3+8=0$ すなわち $\alpha^3=-8\cdots$③，同様に $\beta^3=-8\cdots$④

$$\alpha^3+\beta^3=-8+(-8)=\boldsymbol{-16}$$

(4)

$$\alpha^{10}=\alpha^9\cdot\alpha=(\alpha^3)^3\cdot\alpha=(-8)^3\cdot\alpha=-512\alpha$$

同様に $\beta^{10}=-512\beta$ から

$$\alpha^{10}+\beta^{10}=-512\alpha+(-512\beta)=-512(\alpha+\beta)=\boldsymbol{-1024}$$

11 関数

$$f(x)=4^x+4^{-x}-6\cdot2^x-6\cdot2^{-x}+2$$

を考える。以下の問に答えよ。

(1) 不等式 $2^x+2^{-x}\geqq2$ が成り立つことを示せ。また，等号が成立する x の値を求めよ。

(2) $t=2^x+2^{-x}$ とする。$f(x)$ を t を用いて表せ。

(3) 等式

$$s+\frac{1}{s}=6$$

を満たすような正の実数 s の値を求めよ。

(4) 方程式 $f(x)=0$ を解け。 〔岐阜大〕

(1) $2^x>0$，$2^{-x}>0$ であり，相加相乗平均の関係から

$$2^x+2^{-x}\geqq2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}$$

すなわち $2^x+2^{-x}\geqq2$ が成り立つ。

等号は $2^x=2^{-x}$ から $x=-x$ すなわち $\boldsymbol{x=0}$ **のとき成立**。

◀ 2 つの正の数で，積が一定の和を評価する

(2) $4^x+4^{-x}=\left(2^x+2^{-x}\right)^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}=t^2-2$ を用いて

$$f(x)=t^2-2-6t+2=\boldsymbol{t^2-6t\ \ (t\geqq2)}$$

(3) 条件式の両辺に $s\neq0$ をかけて

$$s^2+1=6s \quad \text{すなわち}\ s^2-6s+1=0$$

解の公式から $s=3\pm2\sqrt{2}$

いずれも $s>0$ を満たすので $\boldsymbol{s=3\pm2\sqrt{2}}$

◀ $s<0$ となるものがあれば除く

(4) (2) より $t^2-6t=0$ を解いて $t\geqq2$ から $t=6$ となる。すなわち

$$2^x+2^{-x}=6$$

$2^x=s>0$ とすれば (3) より $2^x=3\pm2\sqrt{2}$

したがって $\boldsymbol{x=\log_2\left(3\pm2\sqrt{2}\right)}$

12 $f(x)=2x^2+x+1$ とおき，放物線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(1, 4)$ における接線を ℓ とする。点 P を通り，ℓ とのなす角が 45° である直線で，傾きが正であるものを m とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 直線 m の方程式を求めよ。

(3) $y=f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$，直線 m，および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。　〔佐賀大〕

(1) $f'(x)=4x+1$ であり，$f'(1)=5$ から 直線 ℓ の方程式は

$y=5(x-1)+4$ すなわち $\boldsymbol{y=5x-1}$

(2) 直線 ℓ と x 軸の正の方向となす鋭角を θ とする。

このとき $\tan\theta=5$ であり $\tan\theta>1=\tan 45^\circ$ から

$45^\circ<\theta<90^\circ$ となり，直線 m と x 軸の正の方向となす鋭角を θ' とすると $\theta'=\theta-45^\circ$ となる。

加法定理を用いて

$$\begin{aligned}\tan\theta' &= \tan(\theta-45^\circ)\\ &= \frac{\tan\theta-\tan 45^\circ}{1+\tan\theta\tan 45^\circ}\\ &= \frac{5-1}{1+5}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

直線 m の方程式は

$y=\frac{2}{3}(x-1)+4$ すなわち $\boldsymbol{y=\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}}$

(3) 直線 m と曲線 $y=f(x)$ の共有点の x 座標は

$2x^2+x+1=\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}$ を解いて

$6x^2+3x+3=2x+10$

$6x^2+x-7=0$

$(x-1)(6x+7)=0$ から $x=-\frac{7}{6}, 1$

$0 \leqq x \leqq 1$ では $f(x) \leqq \frac{2}{3}x+\frac{10}{3}$ から求める面積は

◀ $0 \leqq x \leqq 1$ では $f(x) \leqq \frac{2}{3}x+\frac{10}{3}$ であることを示した。

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \left\{\left(\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}\right)-f(x)\right\}dx\\ &= \int_0^1 \left(-2x^2-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}\right)dx\\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{3}x\right]_0^1\\ &= -\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\frac{7}{3}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

13 x の整式 A，B を以下のように定める。

$$A = 3x^2 + 14x - 24,\ B = 2x + c$$

ただし c は実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) x についての方程式 $A = B$ が虚数解をもつときの c の範囲を求めよ。

(2) x の整式 $P(x) = 18x^4 + 168x^3 + 116x^2 - 1288x + 1050$ を A を用いて表せ。

(3) (2) の $P(x)$ について，方程式 $P(x) = 0$ を解け。〔鳥取大〕

(1) $A = B$ は $3x^2 + 14x - 24 = 2x + c$ であり

$$3x^2 + 12x - 24 - c = 0 \quad \text{として}$$

（判別式）< 0 となるのは

$$6^2 - 3\,(-24 - c) < 0 \quad \text{を解く}$$

$108 + 3c < 0$ から $\boldsymbol{c < -36}$

(2) 実際 $P(x)$ を A で割り算する。

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & & 6x^2 & +28x & -44 & \\
\hline
3x^2 + 14x - 24 & 18x^4 & +168x^3 & +116x^2 & -1288x & +1050 \\
 & 18x^4 & +84x^3 & -144x^2 & & \\
\hline
 & & 84x^3 & +260x^2 & -1288x & \\
 & & 84x^3 & +392x^2 & -672x & \\
\hline
 & & & -132x^2 & -616x & +1050 \\
 & & & -132x^2 & -616x & +1056 \\
\hline
 & & & & & -6
\end{array}$$

（商）$= 6x^2 + 28x - 44 = 2\,(3x^2 + 14x - 24) + 4 = 2A + 4$ から

$$P(x) = A\,(2A + 4) - 6 = \boldsymbol{2A^2 + 4A - 6}$$

(3) (2) より $2A^2 + 4A - 6 = 0$ を解く。

$$A^2 + 2A - 3 = 0$$

$$(A + 3)(A - 1) = 0$$

$$(3x^2 + 14x - 21)(3x^2 + 14x - 25) = 0$$

解の公式を用いて，$\boldsymbol{x = \dfrac{-7 \pm 4\sqrt{7}}{3},\ \dfrac{-7 \pm 2\sqrt{31}}{3}}$

◀（整数係数の）2 次方程式の左辺が（有理数の範囲で）因数分解できるとき，判別式の値は平方数