7 $\triangle$OAB は OA $=$ OB $= 1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\dfrac{3}{5}$ を満たすとする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 線分 AB の長さを求めなさい。

(2) 直線 OA 上に点 O とは異なる点 C を，BC $= 1$ を満たすようにとる。このとき，線分 OC の長さを求めなさい。

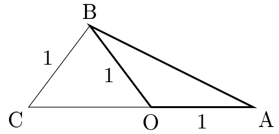
(3) $\triangle$OAB，$\triangle$OBC の内接円の半径をそれぞれ求めなさい。 〔山口大〕

(1)
$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 \\ &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 \\ &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - 2\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 \\ &= 1 + \frac{6}{5} + 1 \\ &= \frac{16}{5}\end{aligned}$$

◀ $\cos\angle\mathrm{AOB} = -\dfrac{3}{5}$ を用いて余弦定理から求めてよい

AB > 0 から $\mathbf{AB = \dfrac{4}{\sqrt{5}}}$

(2) 実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とできる。BC $= 1$ から

◀ 

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2 &= 1^2 \\ \left|k\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 &= 1 \\ k^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 - 2k\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 &= 1 \\ k^2 + \frac{6}{5}k &= 0\end{aligned}$$

◀ $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$k = 0$ のとき C は O と一致するので $k = -\dfrac{6}{5}$ となる。

そして OC $= \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = \left|-\dfrac{6}{5}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \dfrac{6}{5}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \mathbf{\dfrac{6}{5}}$

(3) $\triangle$OAB の内接円の半径を r_1 とする。

まず

$\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2} = \dfrac{2}{5}$ であり

$\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{OA} + \mathrm{OB} + \mathrm{AB})\,r_1$ から

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{2}\left(1 + 1 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)r_1 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}r_1$$

$$r_1 = \frac{2}{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{2\left(5 - 2\sqrt{5}\right)}{25 - 20} = \mathbf{\frac{2\left(5 - 2\sqrt{5}\right)}{5}}$$

$\triangle$OBC の内接円の半径を r_2 とする。

$\triangle\mathrm{OBC} = \dfrac{6}{5}\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{12}{25}$

◀ $\triangle\mathrm{OBC} : \triangle\mathrm{OAB} = \mathrm{OC} : \mathrm{OA} = \dfrac{6}{5} : 1$

$\triangle\mathrm{OBC} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{OB} + \mathrm{OC} + \mathrm{BC})\,r_2$ から

$$\frac{12}{25} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{6}{5} + 1\right) r_2 = \frac{8}{5} r_2$$

$12 = 40r_2$　すなわち $r_2 = \dfrac{12}{40} = \boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

8 座標平面上の 2 点 A$(0, -1)$，B$(1, 2)$ を通る直線を ℓ とする。また，中心 $(3, -2)$，半径 3 の円を C とする。次の問いに答えよ。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) ℓ と C は共有点を持たないことを示せ。

(3) 点 P が円 C 上を動くとき，三角形 ABP の重心の軌跡を T とする。T はどのような図形になるか答えよ。

(4) (3) で求めた図形 T 上の点 (x, y) に対して，$\sqrt{x^2+y^2}$ の最大値と最小値を求めよ。

〔新潟大〕

(1) （直線 AB の傾き）$= \dfrac{2-(-1)}{1-0} = 3$ から ℓ の方程式は

$$\boldsymbol{y = 3x - 1}$$

(2) ℓ の方程式を $3x - y - 1 = 0$ として，

円 C の中心から ℓ までの距離 d は公式を用いて

$$d = \frac{|3 \cdot 3 - (-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}$$

$d > 3 =$（円 C の半径）となるので，ℓ と C が示された。

(3) P(a, b)，△ABP の重心を G(x, y) として考える。

◀ 軌跡を求める点の座標を (x, y) と置き，x と y の関係式(この場合は等式(方程式))を作る。

円 C の方程式は $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$ であり，P は C 上にあるので

$$(a-3)^2 + (b+2)^2 = 9 \cdots ①$$

G は △ABP の重心なので

$$\begin{cases} x = \dfrac{0+1+a}{3} \cdots ② \\ y = \dfrac{-1+2+b}{3} \cdots ③ \end{cases}$$

したがって

$$\begin{cases} a = 3x - 1 \cdots\cdots ②' \\ b = 3y - 1 \cdots\cdots ③' \end{cases}$$

②$'$，③$'$ を ① に代入し

$$(3x-4)^2 + (3y+1)^2 = 9$$

両辺を 9 で割り

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

また，(2) より，P が C の円周上である限り，必ず三角形 ABP は存在するので，除く点は考えなくてよい。

したがって T は**点 $\left(\dfrac{4}{3}\,,\,-\dfrac{1}{3}\right)$ を中心とする，半径 1 の円**

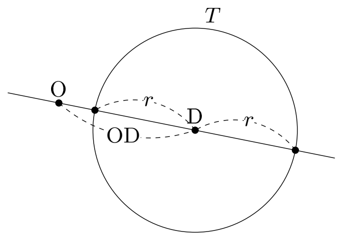
(4) 原点を $\mathrm{O}(0, 0)$，T を中心 $\mathrm{D}\left(\dfrac{4}{3}\,,\,-\dfrac{1}{3}\right)$，半径 $r=1$ の円とする。$\mathrm{OD}=\dfrac{1}{3}\sqrt{4^2+(-1)^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$ である。

ここで，$\sqrt{x^2+y^2}$ は，原点 O と円 T 上の点との距離なので，円 T と直線 OD との 2 つの交点を考える。

$\sqrt{x^2+y^2}$ が最小となるのは，2 つの交点のうち線分 OD 上にある方で，最大となるのはもう 1 つの交点である。

したがって，**最大値は $\mathrm{OD}+r=\dfrac{\sqrt{17}+3}{3}$**，

最小値は $\mathrm{OD}-r=\dfrac{\sqrt{17}-3}{3}$



9 3 個のさいころ A，B，C を同時に投げる。それぞれのさいころの出る目を a，b，c で表す。このとき，次の問に答えよ。

(1) $ab = c$ となる確率を求めよ。

(2) a，b，c のうち，少なくとも 1 つが偶数となる確率を求めよ。

(3) $a + b + c > 5$ となる確率を求めよ。

(4) $(a - b)(b - c)(c - a) < 0$ となる確率を求めよ。

(5) $ab - bc$ が負の奇数となる確率を求めよ。

(6) $ab - bc$ が正の偶数となる確率を求めよ。 〔山形大〕

(a, b, c) の根元事象の数は $6^3 = 216$ 個あり，これらは同様に確からしく起こる。

(1)
- $c = 1$ のとき $(a, b) = (1, 1)$
- $c = 2$ のとき $(a, b) = (1, 2), (2, 1)$
- $c = 3$ のとき $(a, b) = (1, 3), (3, 1)$
- $c = 4$ のとき $(a, b) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$
- $c = 5$ のとき $(a, b) = (1, 5), (5, 1)$
- $c = 6$ のとき $(a, b) = (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$

求める確率は $\dfrac{1+2+2+3+2+4}{216} = \boldsymbol{\dfrac{7}{108}}$

(2) 余事象は a，b，c すべてが奇数であることなので，求める確率は

$$1 - \frac{3^3}{6^3} = 1 - \frac{1}{8} = \boldsymbol{\frac{7}{8}}$$

(3) 余事象は $a + b + c \leqq 5$ となることである。

順序を考えない a，b，c の目の出方を $\{a, b, c\}$ で表すと

- $a + b + c = 3$ のとき $\{a, b, c\} = \{1, 1, 1\}$ であり，
  順序をつけても (a, b, c) の組は 1 組である。

- $a + b + c = 4$ のとき $\{a, b, c\} = \{1, 1, 2\}$ であり，
  順序をつけた (a, b, c) の組は $\dfrac{3!}{1!2!} = 3$ 組ある。

- $a + b + c = 5$ のとき $\{a, b, c\} = \{1, 1, 3\}, \{1, 2, 2\}$ であり，
  順序をつけた (a, b, c) の組はそれぞれ 3 組ずつある。

求める確率は $1-\dfrac{1+3+3+3}{216}=\dfrac{206}{216}=\mathbf{\dfrac{103}{108}}$

(4)　a，b，c のいずれか 2 つが等しいとき，条件式の左辺は 0 となり，負となることはないので，a，b，c がすべて異なることが必要条件である。このとき，この 3 数の順序のつけかたは，下の ①〜⑥ の 6 通りある。

① $a<b<c$　② $a<c<b$　③ $b<a<c$
④ $b<c<a$　⑤ $c<a<b$　⑥ $c<b<a$

	①	②	③	④	⑤	⑥
$\Delta_1=a-b$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$\Delta_2=b-c$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\Delta_3=c-a$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\Delta_1\cdot\Delta_2\cdot\Delta_3$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$

表から ②，③，⑥ のとき条件を満たす。
② の $a<c<b$ となる (a, b, c) の組は ${}_6\mathrm{C}_3=20$ 組 ある。
③，⑥ についても同様なので求める確率は $\dfrac{20\times 3}{216}=\mathbf{\dfrac{5}{18}}$

(5)　$ab-bc=b(a-c)$ が負の奇数となるのは
「b が奇数かつ $a-c$ が負の奇数」となることである。
$b=1, 3, 5$ であり，その各々に対して

$$(a, c)=(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (5, 6)$$

の 9 通りあるので，求める確率は $\dfrac{9\times 3}{216}=\mathbf{\dfrac{1}{8}}$

(6)　$ab-bc=b(a-c)$ が正の偶数となるのは
「b が偶数のとき $a-c$ が正の数」または
「b が奇数のとき $a-c$ が正の偶数」となることである。

◀ 排反な事象に分割する

$b=2, 4, 6$ のとき，各々に対して
$a-c$ が正の数となる (a, c) の組は $\dfrac{6^2-6}{2}=15$ 組 ある。

◀ $a-c$ の符号

a \ c	1	2	3	4	5	6
1		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
2	$+$		$-$	$-$	$-$	$-$
3	$+$	$+$		$-$	$-$	$-$
4	$+$	$+$	$+$		$-$	$-$
5	$+$	$+$	$+$	$+$		$-$
6	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	

${}_6\mathrm{C}_2=15$ 個としてもよい

$b=1,3,5$ のとき，各々に対して
$a-c$ が正の偶数となる (a, c) の組は

$$(a, c)=(3, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 3), (6, 2), (6, 4)$$

の 6 組ある。求める確率は $\dfrac{3\times 15+3\times 6}{216}=\mathbf{\dfrac{7}{24}}$