4 $k,\ x,\ y,\ z$ を実数とする。k が以下の (1)，(2)，(3) のそれぞれの場合に，不等式

$$x^2+y^2+z^2+k\,(xy+yz+zx) \geqq 0$$

が成り立つことを示せ。また等号が成り立つのはどんな場合か。

(1) $k=2$

(2) $k=-1$

(3) $-1<k<2$

〔神戸大〕

$f\,(x,\ y,\ z,\ k)=x^2+y^2+z^2+k\,(xy+yz+zx)$ とする。

(1) $k=2$ のとき

$$\begin{aligned} f\,(x,\ y,\ z,\ 2) &= x^2+y^2+z^2+2\,(xy+yz+zx) \\ &= (x+y+z)^2 \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

◀ 3 項の和の平方

が成り立つ。等号は $x+y+z=0$ のときに成立。

(2) $k=-1$ のとき

$$\begin{aligned} f\,(x,\ y,\ z,\ -1) &= x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx) \\ &= \frac{1}{2}\left\{2x^2+2y^2+2z^2-2\,(xy+yz+zx)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\} \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

◀ 平方の和（経験則がないと困難）

が成り立つ。等号は $x-y=0$ かつ $y-z=0$ かつ $z-x=0$

すなわち $x=y=z$ のとき成立。

(3) $-1<k<2$ のとき

$$\begin{aligned} f\,(x,\ y,\ z,\ k) &= x^2+k\,(y+z)\,x+y^2+z^2+kyz \\ &= \left(x+\frac{k}{2}\,(y+z)\right)^2 \\ &\qquad -\frac{k^2}{4}(y+z)^2+y^2+z^2+kyz \\ &= \left(x+\frac{k}{2}\,(y+z)\right)^2 \\ &\qquad +\left(1-\frac{k^2}{4}\right)y^2+\left(1-\frac{k^2}{4}\right)z^2 \\ &\qquad\qquad +\left(k-\frac{k^2}{2}\right)yz \end{aligned}$$

◀ まず x についての 2 次式として考える

ここで

$$g\,(y,\ z,\ k)=\left(1-\frac{k^2}{4}\right)y^2+\left(1-\frac{k^2}{4}\right)z^2+\left(k-\frac{k^2}{2}\right)yz$$

とすると

$g\,(y,\ z,\ k)$

$$= \frac{(2+k)(2-k)}{4}y^2 + \frac{(2+k)(2-k)}{4}z^2 + \frac{k(2-k)}{2}yz$$

$$= \frac{2-k}{4}\{(2+k)y^2 + (2+k)z^2 + 2kyz\}$$

$$= \frac{2-k}{4}\left\{(2+k)\left(y + \frac{k}{2+k}z\right)^2 - \frac{k^2}{2+k}z^2 + (2+k)z^2\right\}$$

$$= \frac{2-k}{4}\left\{(2+k)\left(y + \frac{k}{2+k}z\right)^2 + \frac{(2+k)^2 - k^2}{2+k}z^2\right\}$$

$$= \frac{2-k}{4}\left\{(2+k)\left(y + \frac{k}{2+k}z\right)^2 + \frac{4(1+k)}{2+k}z^2\right\}$$

◀ いくつかの平方和への変形を目標にする

とでき，$\frac{2-k}{4} > 0$，$2+k > 0$，$4(1+k) > 0$，$2+k > 0$ から任意の実数 y，z，k について $g(y, z, k) \geqq 0$ が成り立つ。

等号は $y + \frac{k}{2+k}z = 0$ かつ $z = 0$ すなわち $(y, z) = (0, 0)$ のときに成立する。

また $f(x, y, z, k) = \left(x + \frac{k}{2}(y+z)\right)^2 + g(y, z, k)$ であり $g(y, z, k) \geqq 0$ から $f(x, y, z, k) \geqq 0$ が成り立つ。

等号は $x + \frac{k}{2}(y+z) = 0$ かつ $g(x, y, z, k) = 0$ すなわち $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ のときに成り立つ。

【別解】

正の実数 α，β を用いて

(1) の結果の両辺を α 倍，(1) の結果の両辺を β 倍し

$$\alpha(x^2 + y^2 + z^2) + 2\alpha(xy + yz + zx) \geqq 0 \cdots ①$$

$$\beta(x^2 + y^2 + z^2) - \beta(xy + yz + zx) \geqq 0 \cdots ②$$

辺々加えて

$$(\alpha + \beta)(x^2 + y^2 + z^2) + (2\alpha - \beta)(xy + yz + zx) \geqq 0$$

$\alpha + \beta = 1$，$2\alpha - \beta = k$ とすると

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{1+k}{3}, \frac{2-k}{3}\right) \cdots ③$$

$-1 < k < 2$ のとき $\alpha > 0$ かつ $\beta > 0$

さらに (1) と (2) の等号成立条件の論理積 $x + y + z = 0$ かつ $x = y = z$ すなわち $x = y = z = 0$ とすることができるので，

◀ 等号成立条件

$-1 < k < 2$ のとき，

与えられた不等式は成り立ち，等号は $x = y = z = 0$ のとき成立。

5 xy 平面において 2 つの円

$$C_1 : x^2-2x+y^2+4y-11=0,\ C_2 : x^2-8x+y^2-4y+k=0$$

が外接するとし，その接点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1) k の値を求めよ。

(2) P の座標を求めよ。

(3) 円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち点 P を通らないものは 2 本ある。これら 2 直線の交点 Q の座標を求めよ。 〔筑波大〕

C_1 は $(x-1)^2+(y+2)^2=16$ から

中心 $O_1(1,-2)$，半径 $r_1=4$ の円

C_2 は $(x-4)^2+(y-2)^2=20-k$ から $k<20$ のとき

中心 $O_2(4,2)$，半径 $r_2=\sqrt{20-k}$ の円である。

(1) C_1 と C_2 が外接するとき $O_1O_2=r_1+r_2$ から

$$5=4+\sqrt{20-k}$$

$\sqrt{20-k}=1$ より $\boldsymbol{k=19}$ これは $k<20$ を満たす

(2) P は線分 O_1O_2 を $r_1:r_2=4:1$ に内分する点なので

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OO_1}+4\overrightarrow{OO_2}}{4+1}=\frac{(1,-2)+4(4,2)}{5}$$

したがって $\mathbf{P}\left(\frac{17}{5},\frac{6}{5}\right)$

◀ 円の接点は分点を用いるとよいことが多い

◀ 座標は原点 O を基点とした位置ベクトルの成分と同一視できる

(3) C_1 と C_2 の共通接線で，P を通らない 2 本の接線のうち，適当な 1 本について，O_1，O_2 から下ろした垂線の足をそれぞれ H_1，H_2 とする。

このとき $\angle O_1H_1Q=\angle O_2H_2Q=90^\circ \cdots$①

$\triangle O_1H_1Q$ と $\triangle O_2H_2Q$ について

① および $\angle O_1QH_1=\angle Q_2QH_2$（共通）から

$$\triangle O_1H_1Q \backsim \triangle O_2H_2Q \quad \text{から}$$

$$O_1Q:O_2Q=O_1H_1:O_2H_2=r_1:r_2=4:1$$

したがって Q は線分 O_1O_2 を $4:1$ に外分する点なので

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{(-1)\overrightarrow{OO_1}+4\overrightarrow{OO_2}}{4+(-1)}=\frac{-(1,-2)+4(4,2)}{3}$$

したがって $\mathbf{Q}\left(5,\frac{10}{3}\right)$

6 初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7) \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で表される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ を求めよ。

〔北海道大〕

(1) まず $a_1 = S_1 = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 9 = 3$

次に $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7) - \frac{1}{6}(n-1)n(2n+5) \\ &= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+7) - (n-1)(2n+5)\} \\ &= \frac{1}{6}n(6n+12) \\ &= n(n+2) \end{aligned}$$

これは $a_1 = 3$ を満たす。したがって $\boldsymbol{a_n = n(n+2)}$

◀ $a_1 = S_1$
$n \geqq 2$ のとき
$a_n = S_n - S_{n-1}$

(2) $a_k = \dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right)$ を用いて

◀ 部分分数分解(経験則)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots \right. \\ &\qquad \left. \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2) - 2(n+2) - 2(n+1)}{2(n+1)(n+2)} \\ &= \boldsymbol{\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}} \end{aligned}$$

◀ 相殺できる項を間違わないように注意する