2022 年度入試（数学 Ⅱ·B）記述対策

1 $a=\cos\frac{\pi}{5}$，$b=\cos\frac{\pi}{7}$ とする。

(1) $\cos\frac{\pi}{10}$ を a を用いた式で表せ。

(2) $\sin\frac{\pi}{14}$ を b を用いた式で表せ。

(3) $\cos\frac{\pi}{35}$ を a と b を用いた式で表せ。

〔愛知教育〕

(1)

$$\cos^2\frac{\pi}{10}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{5}}{2}=\frac{1+a}{2}$$ となり

◀ 半角の公式

$\cos\frac{\pi}{10}>0$ から $\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{\boldsymbol{\frac{1+a}{2}}}$

(2) (1) と同様に

$$\sin^2\frac{\pi}{14}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{7}}{2}=\frac{1-b}{2}$$ となり

$\sin\frac{\pi}{14}>0$ から $\sin\frac{\pi}{14}=\sqrt{\boldsymbol{\frac{1-b}{2}}}$

(3) $\frac{\pi}{35}=\frac{\pi}{5\cdot7}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{7}\right)=\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{14}$ であり

$$\cos\frac{\pi}{35}=\cos\left(\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{14}\right)$$
$$=\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{14}+\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{14}\quad\cdots①$$

ここで (1)，(2) と同様な計算から

◀ ① から必要な値を考える

$\sin\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{1-a}{2}}$，$\cos\frac{\pi}{14}=\sqrt{\frac{1+b}{2}}$ を ① に代入し

$$\cos\frac{\pi}{35}=\sqrt{\frac{1+a}{2}}\sqrt{\frac{1+b}{2}}+\sqrt{\frac{1-a}{2}}\sqrt{\frac{1-b}{2}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{(1+a)(1+b)+(1-a)(1-b)}}{2}}$$

◀ 表記の方法は様々です

2 関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 7$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x) = 0$ を解け。

(2) $f(x)$ が $x = \alpha, \beta$（ただし $\alpha < \beta$）で極値をとるとき，α と β を求めよ（極値を求める必要はない）。

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれる領域のうち，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ をみたす部分の面積を求めよ。

〔琉球大〕

(1) $f(1) = 2 - 3 - 6 + 7 = 0$ より $f(x)$ は $x - 1$ を因数にもつ。

◀ 因数定理

実際に割り算して

1	2	-3	-6	7
		2	-1	-7
	2	-1	-7	0

$f(x) = (x-1)(2x^2 - x - 7) = 0$ の解は

$$\boldsymbol{x = 1,\ \frac{1 \pm \sqrt{57}}{4}}$$

(2) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 6 = 6(x^2 - x - 1)$ であり，

$f'(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解 $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ をもつ。

$\alpha = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$，$\beta = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ とすると増減表は

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

◀ 受験生にはくどいかもしれない
教科書では必ず確かめましょうとなっている

となり，確かに $x = \alpha, \beta$ で極値をとる。したがって

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

(3) (1)，(2) の結果から $\alpha < 1 < \beta$ であり，

$\alpha \leqq x \leqq 1$ で $f(x) \geqq 0$，$1 \leqq x \leqq \beta$ で $f(x) \leqq 0$ より

求める面積を S とすると

◀ α と β を用いて表してみる

$$
\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^1 f(x)\,dx - \int_\beta^1 f(x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x\right]_\alpha^1 - \left[\frac{1}{2}x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x\right]_1^\beta \\
&= 2\left(\frac{1}{2} - 1 - 3 + 7\right) - \frac{1}{2}(\alpha^4 + \beta^4) + (\alpha^3 + {}^3) \\
&\qquad + 3(\alpha^2 + \beta^2) - 7(\alpha + \beta) \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

ここで解と係数の関係から $\alpha + \beta = 1$，$\alpha\beta = -1$ であるので

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 + 2 = 3$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1+3=4$$

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=9-2=7$$

を ① に代入すると

$$S=7-\frac{1}{2}\cdot 7+4+9-7=\mathbf{\frac{19}{2}}$$

3 c を整数とする。次の問いに答えよ。

(1) 55 と 72 は互いに素であることを示せ。

(2) 不定方程式 $55x + 72y = 1$ の整数解を 1 組求めよ。

(3) 不定方程式 $55x + 72y = c$ の整数解をすべて求めよ。

(4) $c > 3960$ のとき，不定方程式 $55x + 72y = c$ の整数解で $x > 0$ かつ $y > 0$ をみたすものが存在することを示せ。 〔島根大〕

(1) 55 と 72 をそれぞれ素因数分解すると

$$55 = 5 \times 11,\ 72 = 2^3 \times 3^2 \quad \text{であり}$$

共通の素因数をもたないので，55 と 72 は互いに素であることが示された。

(2) $55x + 72y = 1$ から

$$55x = 1 - 72y$$

$$x = \frac{1-72y}{55} = \frac{1-17y-55y}{55} = \frac{1-17y}{55} - y$$

x が整数となるとき $1 - 17y$ は 55 の倍数となるので，

$$1 - 17y = 55m\ (m \text{ は整数となる})$$

$$17y = 1 - 55m$$

$$y = \frac{1-55m}{17} = \frac{1-4m-51m}{17} = \frac{1-4m}{17} - 3m$$

y が整数となるとき $1 - 4m$ は 17 の倍数となるので

$$1 - 4m = 17n\ (n \text{ は整数となる})$$

$$4m = 1 - 17n$$

$$m = \frac{1-17n}{4} = \frac{1-n-16n}{4} = \frac{1-n}{4} - 4n$$

m が整数となるとき $1 - n$ は 4 の倍数となるので，
整数 k を用いて $1 - n = 4k$ とできる。
$n = 1 - 4k$ であり $k = 0$ とすると $n = 1$ さらに $m = -4$
となり $y = 13,\ x = -17$ $\quad$ **$(x, y) = (-17, 13)$**

◀ 互除法による方法

$55 = 72 \times 0 + 55 \quad \cdots$ ㋐
$72 = 55 \times 1 + 17 \quad \cdots$ ㋑
$55 = 17 \times 3 + 4 \quad \cdots$ ㋒
$17 = 4 \times 4 + 1 \quad \cdots$ ㋓

$1 = 17 - 4 \times 4 \quad (\because$ ㋓$)$
$= 17 + 4 \times (-4)$
$= 17 + (55 - 17 \times 3) \times (-4) \quad (\because$ ㋒$)$
$= 55 \times (-4) + 17 \times 13$
$= 55 \times (-4) + (72 - 55 \times 1) \times 13 \quad (\because$ ㋑$)$
$= 72 \times 13 + 55 \times (-17)$
$= 72 \times 13 + (55 - 72 \times 0) \times (-17) \quad (\because$ ㋐$)$
$= 55 \times (-17) + 72 \times 13$

◀ $m = -4,\ n = 1$ に気づけばここでやめてもよい

◀ 解を 1 つ見つけるだけでよいので，計算しやすいものを選ぶ

(3) $55x + 72y = c \cdots$ ①
また，(2) より $55 \cdot (-17c) + 72 \cdot 13c = c \cdots$ ②
① − ② から

$$55(x + 17c) + 72(y - 13c) = 0$$

$$55(x + 17c) = -72(y - 13c) \quad \cdots ③$$

③ の左辺は 55 の倍数，右辺は 72 の倍数より，この式の値は 55

と 72 の公倍数となる。(1) より 55 と 72 の最小公倍数は $55\cdot72$ となるので ③ の式の値は，整数 ℓ を用いて $55\cdot72\ell$ とできる。

③ に代入し $x+17c=72\ell$，$y-13c=-55\ell$ すなわち

$$\boldsymbol{(x,\,y)=(72\ell-17c,\,-55\ell+13c)}\ \textbf{(}\boldsymbol{\ell}\ \textbf{は整数)}$$

(4) (3) において ① の整数解で $x>0$ かつ $y>0$ を満たすとき

$72\ell-17c>0$ かつ $-55\ell+13c>0$ より

$$\frac{17c}{72}<\ell<\frac{13c}{55}\ \cdots④$$

④ を満たす整数 ℓ が存在することを示す。

◀ ここでは十分条件を示す

ここで $\dfrac{13c}{55}-\dfrac{17c}{72}=\dfrac{c}{55\cdot72}$ であり

$c>3960$ のとき $\dfrac{c}{3960}>1$ から 開区間 $\left(\dfrac{17c}{72},\ \dfrac{13c}{55}\right)$ の区間幅は 1 より大きくなるので，この区間内に少なくとも 1 つ整数が存在する。すなわち ④ を満たす整数 ℓ が存在することが示された。