1 a, b を実数とする。座標平面上の放物線

$$C : y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。

(1) 点 (a, b) のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(1) $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = -x^2$ とする。

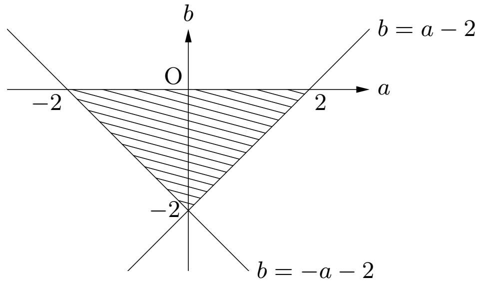
放物線 $C : y = f(x)$ は下に凸，$y = g(x)$ は上に凸から，求める条件は

$$\begin{cases} g(-1) < f(-1) \cdots ① \\ g(0) > f(0) \cdots ② \\ g(1) < f(1) \cdots ③ \end{cases}$$

① は $0 > b$, ② は $-1 < 1 - a + b$ すなわち $b > a - 2$,

③ は $-1 < 1 + a + b$ すなわち $b > -a - 2$

(a, b) の範囲は下図の斜線部で境界はすべて含まない。



(2) C の方程式を $b = -xa + y - x^2 \cdots ④$ とし，

ab 平面上で傾き $-x$, b 切片が $y - x^2$ の直線と考える。

- $-x \geqq 1$ すなわち $x \leqq -1$ のとき

  $2x < y - x^2 < -2x$　から　$x^2 + 2x < y < x^2 - 2x$

- $-x \leqq -1$ すなわち $x \geqq 1$ のとき

  $-2x < y - x^2 < 2x$　から　$x^2 - 2x < y < x^2 + 2x$

- $x = 0$ のとき

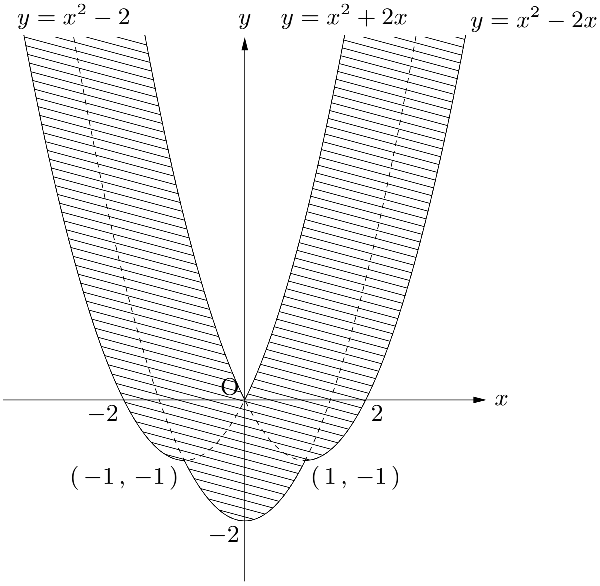
  $-2 < y - x^2 < 0$　から　$x^2 - 2 < y < x^2$

- $0 < -x \leqq 1$ すなわち $-1 \leqq x < 0$ のとき

  $-2 < y - x^2 < 2x$　から　$x^2 - 2 < y < x^2 + 2x$

- $-1 < -x \leqq 0$ すなわち $0 \leqq x < 1$ のとき

  $-2 < y - x^2 < -2x$　から　$x^2 - 2 < y < x^2 - 2x$



図の斜線部で境界はすべて含まない

2 複素数 a，b，c に対して整式 $f(z)=az^2+bz+c$ を考える。i を虚数単位とする。

(1) α，β，γ を複素数とする。$f(0)=\alpha$，$f(1)=\beta$，$f(i)=\gamma$ が成り立つとき，a，b，c をそれぞれ α，β，γ で表せ。

(2) $f(0)$，$f(1)$，$f(i)$ がいずれも 1 以上 2 以下の実数であるとき，$f(2)$ のとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

(1)
$$f(0)=c=\alpha \quad \cdots ①$$
$$f(1)=a+b+c=\beta \quad \cdots ②$$
$$f(i)=-a+bi+c=\gamma \quad \cdots ③$$

① を ②，③ に代入し

$$a+b=-\alpha+\beta \quad \cdots ④$$
$$-a+bi=-\alpha+\gamma \quad \cdots ⑤$$

④ + ⑤ から

$$b(1+i)=-2\alpha+\beta+\gamma$$
$$b(1+i)\overline{(1+i)}=(-2\alpha+\beta+\gamma)\overline{(1+i)}$$
$$b=\frac{1}{2}(1-i)(-2\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=-(1-i)\alpha+\frac{1-i}{2}\beta+\frac{1-i}{2}\gamma$$

④ に代入し

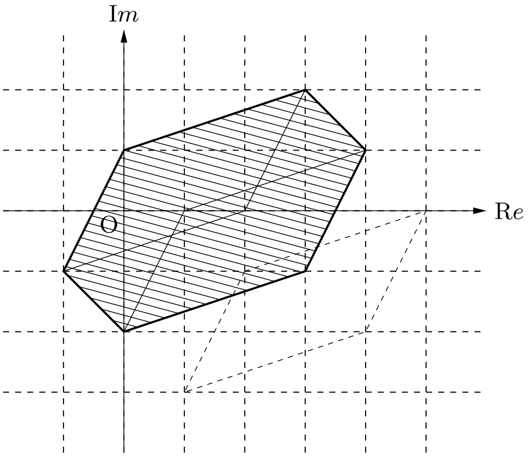
$$a=-b-\alpha+\beta$$

したがって

$$\begin{cases} \boldsymbol{a=-i\alpha+\dfrac{1+i}{2}\beta-\dfrac{1-i}{2}\gamma} \\ \boldsymbol{b=(-1+i)\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma} \\ \boldsymbol{c=\alpha} \end{cases}$$

(2)
$$f(2)=4a+2b+c$$
$$=4\left(-i\alpha+\frac{1+i}{2}\beta-\frac{1-i}{2}\gamma\right)$$
$$+2\left((-1+i)\alpha+\frac{1-i}{2}\beta+\frac{1-i}{2}\gamma\right)+\alpha$$
$$=(-1-2i)\alpha+(3+i)\beta+(-1+i)\gamma$$

と変形して $f(2)$ の範囲は $1\leqq\alpha\leqq 2$，$1\leqq\beta\leqq 2$ から 4 点 $(-1-2i)+(3+i)$，$2(-1-2i)+(3+i)$，$2(-1-2i)+2(3+i)$，$(-1-2i)+2(3+i)$ を頂点とする平行四辺形の周および内部を $1\leqq\gamma\leqq 2$ より $(-1+i)$ から $2(-1+i)$ の範囲で平行移動したものである。



図の斜線部で，6 点 i，$-1-i$，$-2i$，$3-i$，$4+i$，$3+2i$ を頂点とする六角形の周および内部の点である。

3 関数

$$f(x)=\frac{x}{x^2+3}$$

に対して，$y=f(x)$ のグラフを C とする。点 $\mathrm{A}\,(1,\,f(1))$ における C の接線を

$$\ell\ :\ y=g(x)$$

とする。

(1) C と ℓ の共有点で A と異なるものがただ 1 つ存在することを示し，その点の x 座標を求めよ。

(2) (1) で求めた共有点の x 座標を α とする。定積分

$$\int_{\alpha}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx$$

を計算せよ。

(1)

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(x)'(x^2+3)-x(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}\\&=\frac{(x^2+3)-2x^2}{(x^2+3)^2}\\&=\frac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}\quad\text{であり}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(x)&=f'(1)(x-1)+f(1)\\&=\frac{1}{8}(x-1)+\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\end{aligned}$$

C と ℓ との共有点の x 座標は，方程式 $f(x)=g(x)$ の実数解である。$f(x)=g(x)$ を解いて

$$\frac{x}{x^2+3}=\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}$$

$$8x=(x+1)(x^2+3)$$

$$x^3+x^2-5x+3=0$$

$$(x-1)^2(x+3)=0$$

◀

1	1	1	-5	3
		1	2	-3
1	1	2	-3	0
		1	3	
	1	3	0	

$f(x)=g(x)$ の実数解で $x\fallingdotseq 1$ となるものはただ 1 つ存在して，

$\boldsymbol{x=-3}$

(2) (1) より $\alpha=-3$ であり

$$\int_{-3}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx$$

$$=\int_{-3}^{1}(f(x))^2\,dx-2\int_{-3}^{1}f(x)g(x)\,dx+\int_{-3}^{1}(g(x))^2\,dx$$

として，

$$\int_{-3}^{1}(f(x))^2\,dx=\int_{-3}^{1}\frac{x^2}{(x^2+3)^2}\,dx$$

であり，$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とすると

$$\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}=\sqrt{3}\,(\tan^2\theta+1),\quad \begin{array}{c|c} x & -3 \to 1 \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{3}\to\frac{\pi}{6}\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-3}^{1}(f(x))^2\,dx\\
&=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{3\tan^2\theta}{(3(\tan^2\theta+1))^2}\cdot\sqrt{3}\,(\tan^2\theta+1)\,d\theta\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}\,d\theta\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\,d\theta\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos2\theta}{2}\,d\theta\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)-\frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)\right\}\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\\
&=\frac{\sqrt{3}\pi-3}{12}
\end{aligned}$$

◀ $\dfrac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}=\dfrac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}}$

◀ $\sin\theta$ の偶数次の積分は次数下げ

$$\begin{aligned}
&\int_{-3}^{1}f(x)g(x)\,dx\\
&=\frac{1}{8}\int_{-3}^{1}\frac{x(x+1)}{x^2+3}\,dx\\
&=\frac{1}{8}\int_{-3}^{1}\frac{x^2+x}{x^2+3}\,dx\\
&=\frac{1}{8}\int_{-3}^{1}\left(1+\frac{x}{x^2+3}-\frac{3}{x^2+3}\right)dx\\
&=\frac{1}{8}\left[x+\frac{1}{2}\log|x^2+3|\right]_{-3}^{1}-\frac{3}{8}\int_{-3}^{1}\frac{1}{x^2+3}\,dx\\
&=\frac{1}{8}\left(4+\frac{1}{2}(\log4-\log12)\right)-\frac{3}{8}\int_{-3}^{1}\frac{1}{x^2+3}\,dx
\end{aligned}$$

◀ $\dfrac{x^2+x}{x^2+3}=\dfrac{x^2+3-3+x}{x^2+3}$

ここで

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{1}\frac{1}{x^2+3}\,dx&=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\sqrt{3}\,(\tan^2\theta+1)\,d\theta\\
&=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\pi$$

したがって

$$\int_{-3}^{1} f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{8}\left(4 + \frac{1}{2}\log\frac{4}{12}\right) - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\pi$$
$$= \frac{1}{16}\left(8 - \log 3 - \sqrt{3}\pi\right)$$

$$\int_{-3}^{1} (g(x))^2\,dx = \int_{-3}^{1} \frac{1}{64}(x+1)^2\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{192}(x+1)^3\right]_{-3}^{1}$$
$$= \frac{1}{192}\left\{2^3 - (-2)^3\right\}$$
$$= \frac{1}{12}$$

以上から

$$(\text{与式}) = \frac{\sqrt{3}\pi - 3}{12} - 2\cdot\frac{1}{16}\left(8 - \log 3 - \sqrt{3}\pi\right) + \frac{1}{12}$$
$$= \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{24}\pi + \frac{1}{8}\log 3 - \frac{7}{6}}$$
$$= \frac{1}{24}\left(5\sqrt{3}\pi + 3\log 3 - 28\right)$$

4 以下の問いに答えよ。

(1) 正の奇数 K，L と正の整数 A，B が $KA=LB$ を満たしているとする。K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば，A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(2) 正の整数 a，b が $a>b$ を満たしているとする。このとき，$A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B={}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して $KA=LB$ となるような正の奇数 K，L が存在することを示せ。

(3) a，b は (2) の通りとし，さらに $a-b$ が 2 で割りきれるとする。${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(4) ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。

(1) 0 以上の整数 m，n を用いて $K=4m+r$，$L=n+r$
ただし $r=1, 3$ とできる。 $KA=LB$ となるとき

$$(4m+r)\,A=(4n+r)\,B$$

$$4\,(mA-nB)=r\,(B-A)\ \cdots ①$$

$mA-nB$，$B-A$，r は整数であり，① の左辺は 4 の倍数である。

① の右辺も 4 の倍数であるが，r は 4 とは互いに素であるので $B-A$ が 4 の倍数ということとなる。

したがって A を 4 で割った余りと B を 4 で割った余りは等しい。

(2) $a=4$，$b=3$ すなわち $A={}_{17}\mathrm{C}_{13}$ を例にして

$$A=\frac{17\times16\times15\times14\times13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5}{13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$=\frac{17\cdot13\cdot9\cdot5}{13\cdot9\cdot5\cdot1}\times\frac{14\cdot10\cdot6}{10\cdot6\cdot2}\times\frac{15\cdot11\cdot7}{11\cdot7\cdot3}\times\frac{16\cdot12\cdot8}{12\cdot8\cdot4}$$

と 4 つの分数の積に分ける。それぞれの項は 4 で割った余りが 1, 2, 3, 0 となるものを集めている。

一般に

$$A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$$

$$=\frac{(4a+1)\,4a\,(4a-1)\cdots(4\,(a-b)+1)}{(4b+1)\,4b\,(4b-1)\cdots3\cdot2\cdot1}$$

$$=\frac{\overbrace{(4a+1)\cdot(4\,(a-1)+1)\cdot\cdots\cdot(4\,(a-b)+1)}^{(ア)}}{\underbrace{(4b+1)\cdot(4\,(b-1)+1)\cdot\cdots\cdot5\cdot1}_{(イ)}}$$

$$\times \frac{\overbrace{(4(a-1)+2)\cdot(4(a-2)+2)\cdot\cdots\cdot(4(a-b)+2)}^{（ウ）}}{\underbrace{(4(b-1)+2)\cdot(4(b-2)+2)\cdot\cdots\cdot6\cdot2}_{（エ）}}$$

$$\times \frac{\overbrace{(4(a-1)+3)\cdot(4(a-2)+3)\cdot\cdots\cdot(4(a-b)+3)}^{（オ）}}{\underbrace{(4(b-1)+3)\cdot(4(b-2)+3)\cdot\cdots\cdot7\cdot3}_{（カ）}}$$

$$\times \frac{\overbrace{(4a)\cdot4(a-1)\cdot\cdots\cdot4(a-b+1)}^{（キ）}}{\underbrace{4b\cdot4(b-1)\cdot\cdots\cdot8\cdot4}_{（ク）}}$$

として考える。（ア），（イ），（オ），（カ）はそれぞれいくつかの奇数の積なので奇数である。それぞれの値を $O_ア$，$O_イ$，$O_オ$，$O_カ$ とする。

◀ O ： Odd（奇数の意）

（ウ），（エ）について，b 個の偶数の積になっているが約分して

$$\frac{（ウ）}{（エ）} = \frac{(2(a-1)+1)\cdot(2(a-2)+1)\cdot\cdots\cdot(2(a-b)+1)}{(2(b-1)+1)\cdot(2(b-2)+1)\cdot\cdots\cdot3\cdot1}$$

右辺の分子，分母は奇数の積なので奇数である。その値をそれぞれ $O_ウ$，$O_エ$ とする。

最後に（キ），（ク）について，b 個の 4 の倍数の積になっているが約分して

$$\frac{（キ）}{（ク）} = \frac{a\cdot(a-1)\cdot\cdots\cdot(a-b+1)}{b\cdot(b-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1} = {}_a\mathrm{C}_b = B$$

以上から

$$A = \frac{O_ア}{O_イ} \times \frac{O_ウ}{O_エ} \times \frac{O_オ}{O_カ} \times B$$

したがって $K = O_イ \times O_エ \times O_カ$，$L = O_ア \times O_ウ \times O_オ$ とすれば K，L は奇数であり $KA = LB$ が成り立つ。

(3) (2) で用いた記号を継続する。$O_ア$ と $O_イ$ はそれぞれ 4 を法として 1 となる $b+1$ 個の積なので，$O_ア$ と $O_イ$ は 4 を法として合同。

$O_オ$ と $O_カ$ はそれぞれ 4 を法として 3 となる b 個の積なので，$O_オ$ と $O_カ$ は 4 を法として合同。

そして $O_ウ$ の初項 $2(a-1)+1$ と $O_エ$ の初項 $2(b-1)+1$ の差は

$$(2(a-1)+1)-(2(b-1)+1) = 2(a-b)$$

となり，$a-b$ が 2 で割り切れるとき，先の 2 項は 4 を法として合同となる。2 項目以降も同じ議論から $a-b$ が 2 で割りきれるなら $O_ウ$ と $O_エ$ は 4 を法として合同であることが示された。

以上のことから $K = O_イ \times O_エ \times O_カ$ と $L = O_ア \times O_ウ \times O_オ$ は 4 を法として合同なので，(1) から ${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ と ${}_a\mathrm{C}_b$ は 4 を法として合同であることが示された。

(4) $2021 = 4 \times 505 + 1$, $37 = 4 \times 9 + 1$, $505 \equiv 9 \pmod 2$

(3) より ${}_{2021}\mathrm{C}_{37} \equiv {}_{505}\mathrm{C}_9 \pmod 4$

さらに $505 = 4 \times 126 + 1$, $9 = 4 \times 2 + 1$, $126 \equiv 2 \pmod 2$

同様に ${}_{505}\mathrm{C}_9 \equiv {}_{126}\mathrm{C}_2 \pmod 4$

したがって，求める余りは

${}_{126}\mathrm{C}_2 = \dfrac{126 \times 125}{2 \times 1} = 63 \times 125$ を 4 で割った余りの **3**

$\boxed{5}$ α を正の実数とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ を，座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-\alpha, -3)$, $\mathrm{P}(\theta + \sin\theta, \cos\theta)$ 間の距離 AP の 2 乗として定める。

(1) $0 < \theta < \pi$ の範囲に $f'(\theta) = 0$ となる θ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 以下が成り立つような α の範囲を求めよ。

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ は，区間 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のある点において最大になる。

(1)
$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= (\theta + \sin\theta + \alpha)^2 + (\cos\theta + 3)^2 \\
&= \theta^2 + \sin^2\theta + \alpha^2 + 2(\theta\sin\theta + \alpha\sin\theta + \alpha\theta) \\
&\quad + \cos^2\theta + 6\cos\theta + 9 \\
&= \theta^2 + 2(\theta\sin\theta + \alpha\sin\theta + \alpha\theta + 3\cos\theta) + \alpha^2 + 10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(\theta) &= 2\theta + 2(\sin\theta + \theta\cos\theta + \alpha\cos\theta + \alpha - 3\sin\theta) \\
&= 2(-2\sin\theta + \theta\cos\theta + \alpha\cos\theta + \theta + \alpha)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f''(\theta) &= 2(-2\cos\theta + \cos\theta - \theta\sin\theta - \alpha\sin\theta + 1) \\
&= 2(-\cos\theta - (\theta + \alpha)\sin\theta + 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'''(\theta) &= 2(\sin\theta - \sin\theta - (\theta + \alpha)\cos\theta) \\
&= -2(\theta + \alpha)\cos\theta
\end{aligned}
$$

$0 < \theta < \pi$ において $\theta + \alpha \neq 0$ から $f'''(\theta) = 0$ となるのは $\cos\theta = 0$ から $\theta = \frac{\pi}{2}$ のみ。このとき

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'''(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f''(\theta)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	4

$f''(\theta) = 0$ となる θ が $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ に，ただ 1 つ存在する。この値を θ_1 とする。さらに

θ	0	$\cdots$	θ_1	$\cdots$	π
$f''(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f'(\theta)$	4α	$\searrow$		$\nearrow$	0

$4\alpha > 0$ から $f'(\theta) = 0$ となる θ が $0 < \theta < \pi$ では $0 < \theta < \theta_1$ の範囲にただ 1 つ存在することが示された。

(2) (1) での $f'(\theta) = 0$ の解を θ_2 とする。増減表は

θ	0	$\cdots$	θ_2	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ では $\theta = \theta_2$ で最大値をとることがわかる。

$0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ となる同値な条件は $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ なので

$2\left(-2 + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0$

$\alpha > 0$ との共通範囲は $\boldsymbol{\alpha > 2 - \frac{\pi}{2}}$

6 定数 b, c, p, q, r に対し,

$$x^4+bx+c=(x^2+px+q)(x^2-px+r)$$

が x についての恒等式であるとする。

(1) $p\neq 0$ であるとき, q, r を p, b で表せ。

(2) $p\neq 0$ とする。b, c が定数 a を用いて

$$b=(a^2+1)(a+2)\,,\ c=-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$

と表されているとき, 有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+f(a)p^2+g(a)\}=0$$

を満たすものを 1 組求めよ。

(3) a を整数とする。x の 4 次式

$$x^4+(a^2+1)(a+2)\,x-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$

が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ。

(1) 条件式の右辺を展開すると

$$(\text{右辺})=x^4+(-p^2+q+r)\,x^2+(-pq+pr)\,x+qr$$

恒等式となるのは, 両辺の各次数の係数を比較して

$$\begin{cases} -p^2+q+r=0\cdots① \\ -pq+pr=b\cdots② \\ qr=c\cdots③ \end{cases}$$

① から $q+r=p^2\cdots④$, $p\neq 0$ と ② から $q-r=-\dfrac{b}{p}\cdots⑤$

(④ + ⑤) ÷ 2, (④ − ⑤) ÷ 2 から

$$\boldsymbol{q=\frac{1}{2}\left(p^2-\frac{b}{p}\right),\ r=\frac{1}{2}\left(p^2+\frac{b}{p}\right)}$$

(2) $p\neq 0$ のとき (1) の結果を用いると

$$c=qr=\frac{1}{4}\left(p^4-\frac{b^2}{p^2}\right)$$

$$4p^2c=p^6-b^2$$

さらに条件から

$$4p^2\left\{-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)\right\}=p^6-\{(a^2+1)(a+2)\}^2$$

$$p^6+(4a+3)(a^2+1)\,p^2-(a^2+1)^2(a+2)^2=0$$

左辺を $p^2-(a^2+1)$ で割り算して

◀ 問題文に因数が示されている

$$(p^2-(a^2+1))\left(p^4+(a^2+1)\,p^2+(a^2+1)(a+2)^2\right)=0$$

したがって

$$f(t)=t^2+1,\ g(t)=(t^2+1)(t+2)^2$$

(3)　4 つの有理数 p_1，p_2，q_1，q_2 を用いて

$$\begin{aligned}&(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\\&=x^4+(p_1+p_2)x^3+(p_1p_2+q_1+q_2)x^2\\&\qquad+(p_1q_2+p_2q_1)x+q_1q_2\end{aligned}$$

が与えられた 4 次式と恒等式となるのは

$$\begin{cases}p_1+p_2=0\cdots⑥\\p_1p_2+q_1+q_2=0\cdots⑦\\p_1q_2+p_2q_1=(a^2+1)(a+2)\ \cdots⑧\\q_1q_2=-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)\ \cdots⑨\end{cases}$$

⑥ から $p_2=-p_1$ である。

- $p_1=0$ のとき ⑦，⑧，⑨ は

$$\begin{cases}q_1+q_2=0\cdots⑩\\0=(a^2+1)(a+2)\ \cdots⑪\\q_1q_2=-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)\ \cdots⑫\end{cases}$$

⑪ から $a=-2$，⑩ から $q_2=-q_1$ となり ⑫ は

$$-{q_1}^2=\frac{25}{4}$$

となり，これを満たす有理数 q_1 は存在しない。

- $p_1\fallingdotseq 0$ のとき，$p=p_1$，$q=q_1$，$r=q_2$ とすると (1)，(2) の前提を満たすので p は

$$\left(p^2-(a^2+1)\right)\left(p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2\right)=0$$

の有理数解となる。$p\fallingdotseq 0$ のとき

$$p^4>0,\ (a^2+1)p^2>0,\ (a^2+1)(a+2)^2\geqq 0\quad から$$

$$p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2>0\fallingdotseq 0$$

したがって $p^2-(a^2+1)=0$ に限る。

$p^2=a^2+1$ とし，右辺は整数値であるが，有理数 p の平方が整数値のとき，p は整数に限り $p^2-a^2=1$ とし，

$$(p+a)(p-a)=1\quad とでき$$

$p+a$，$p-a$ はともに整数なので

$$(p+a,\ p-a)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$$

$$(p,\ a)=(1,\ 0),\ (-1,\ 0)$$

したがって求める値は $\boldsymbol{a=0}$