1 正の整数に関する条件

(∗) 10 進法で表したときに，どの位にも数字 9 が現れない

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) k を正の整数とするとき，10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件(∗)を満たす正の整数の個数を a_k とする。このとき，a_k を k の式で表せ。

(2) 正の整数 n に対して，

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & (n \text{ が条件}(*)\text{を満たすとき}) \\ 0 & (n \text{ が条件}(*)\text{を満たさないとき}) \end{cases}$$

とおく。このとき，すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$$

(1) $k \geqq 2$ のとき，最上位には 1 から 8 の 8 通りあり，それ以降の各位には 0 から 8 の 9 通りあるので，$a_k = 8\cdot 9^{k-1}$ となり，これは $k=1$ のときも満たす。

したがって $\boldsymbol{a_k = 8\cdot 9^{k-1}}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n$

$$= \underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{88}}+\cdots$$

$$\cdots+\underbrace{\frac{1}{10^{k-1}}+\frac{1}{10^{k-1}+1}+\cdots\frac{1}{88\cdots 8}}$$

$$< \frac{1}{1}\times 8\cdot 9^0+\frac{1}{10}\times 8\cdot 9^1+\cdots+\frac{1}{10^{k-2}}\times 8\cdot 9^{k-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{k-1} 8\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

$$= 8\cdot\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k}{1-\frac{9}{10}}$$

$$= 80\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^k\right)$$

< 80 となり

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$ が示された。

◀ 最初から答えが見えるわけではないので，とりあえず書き出して見て規則性を探る

◀ 各グループの一番大きい項として評価

2 xy 平面上の楕円

$$E\ :\ \frac{x^2}{4}+y^2=1$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) a，b を実数とする。直線 $\ell\ :\ y=ax+b$ と楕円 E が異なる 2 点を共有するための a，b の条件を求めよ。

(2) 実数 a，b，c に対して，直線 $\ell\ :\ y=ax+b$ と直線 $m\ :\ y=ax+c$ が，それぞれ楕円 E と異なる 2 点を共有しているとする。ただし，$b>c$ とする。直線 ℓ と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を P，大きい方を Q とする。また，直線 m と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を S，大きい方を R とする。このとき，等式

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$$

が成り立つための a，b，c の条件を求めよ。

(3) 楕円 E 上の 4 点の組で，それらを 4 頂点とする四角形が正方形であるものをすべて求めよ。

(1) E，ℓ の方程式から y を消去して得られる x の方程式

$$\frac{x^2}{4}+(ax+b)^2=1\ \cdots ①$$

が，異なる 2 つの実数解をもつことが必要かつ十分条件。

① は

$$(4a^2+1)\,x^2+8abx+4b^2-4=0\ \cdots ②$$

$4a^2+1\fallingdotseq 0$ から ② は 2 次方程式になり（判別式）>0 となるのは

$$(4ab)^2-(4a^2+1)(4b^2-4)>0$$

$$16a^2-4b^2+4>0$$

求める条件は $\boldsymbol{4a^2-b^2+1>0}$

(2) $\mathrm{P}(p\,,\,ap+b)$，$\mathrm{Q}(q\,,\,aq+b)$，$\mathrm{S}(s\,,\,as+c)$，$\mathrm{R}(r\,,\,ar+c)$ とする。

p，q は ② の 2 つの解なので，解の公式から

$$p=\frac{-4ab-\sqrt{(-4ab)^2-(4a^2+1)(4b^2-4)}}{4a^2+1}$$

$$=\frac{-2ab-2\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1},$$

$$q=\frac{-2ab+2\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}$$

s, r は ② の b を c に変えた方程式の 2 つの解なので

$$s=\frac{-2ac-2\sqrt{4a^2-c^2+1}}{4a^2+1},$$

$$r=\frac{-2ac+2\sqrt{4a^2-c^2+1}}{4a^2+1}$$

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(q-p,\ a(q-p))=(q-p)(1,\ a)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=(r-s,\ a(r-s))=(r-s)(1,\ a) \quad \text{であり}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ となるのは $(1,\ a)\fallingdotseq\vec{0}$ から

$q-p=r-s$ 　となり

$$\frac{\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}=\frac{\sqrt{4a^2-c^2+1}}{4a^2+1}$$

$$b^2=c^2$$

$b>c$ から $b=-c$ かつ $b>0$

(1) と合わせて求める条件は

$\boldsymbol{4a^2-b^2+1>0,\ 4a^2-c^2+1>0,\ b>0,\ b=-c}$

(3) (2) から 2 直線 ℓ と m は原点について対称で，E も原点について対称である。したがって P と R，Q と S は互いに原点について対称である。正方形 PQRS の外接円は中心が原点 O になるので，この円は x 軸，y 軸について対称であり，E も x 軸，y 軸について対称から P，Q，R，S は互いに x 軸または y 軸について対称である。

これらの 4 点は，正の実数 t を用いて

$\mathrm{P}(-t,\ t)$，$\mathrm{Q}(t,\ t)$，$\mathrm{S}(-t,\ -t)$，$\mathrm{R}(t,\ -t)$

と表すことができ，E 上にあるので

$\dfrac{t^2}{4}+t^2=1$ 　から $t=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

求める 4 点は

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

3 以下の問いに答えよ。

(1) 正の整数 n に対して，二項係数に関する等式を示せ。

$$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n = (n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

また，これを用いて ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ。

(2) 正の整数 n に対して，

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

とおく。このとき，$n \geqq 4$ ならば $a_n > n+2$ であることを示せ。

(3) a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ。

(1)
$$(\text{左辺}) = n\cdot\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!n!}$$

$$(\text{右辺}) = (n+1)\cdot\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!n!}$$

したがって (左辺) = (右辺) が示された。

また右辺の形から，この式の値は $n+1$ の倍数である。左辺が $n+1$ の倍数になるが，n と $n+1$ は互いに素なので ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ が $n+1$ の倍数となることが示された。

◀「互いに素」であるときの性質

(2) (1) より $a_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}}{n}$ とできる。

数学的帰納法により $n \geqq 4$ となる自然数 n について

$a_n > n+2 \cdots$ ①

が成り立つことを示す。

- $n=4$ のとき ① は

$$(\text{左辺}) = a_4 = \frac{{}_8\mathrm{C}_3}{4} = \frac{56}{4} = 14 > 4+2$$

となり ① は成り立つ。

- $n = k\,(\geqq 4)$ のとき ① が成り立つと仮定する。すなわち

$a_k > k+2 \cdots$ ②

ここで $n = k+1$ のとき

$$(\text{左辺}) = a_{k+1} = \frac{{}_{2(k+1)}\mathrm{C}_k}{k+1} = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{(2k+2)!}{k!\,(k+2)!}$$

$$= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{k\,(k-1)!\,(k+2)\,(k+1)!}$$

$$= \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)(k+2)} a_k$$

◀ a_k が出現するように変形した

$$= \frac{2\,(2k+1)}{k+2} a_k \cdots ③$$

$$> \frac{2\,(2k+1)}{k+2} \cdot (k+2) \quad (\because ②)$$

$$= 2\,(2k+1)$$

$$= 4k+2 \cdots ④$$

$$> k+3$$

◀ 結論(示したい式)を先読みしておく

$(\because\ k \geqq 4$ のとき $(4k+2)-(k+3) = 3k-1 > 0)$

① は $n = k+1$ のときにも成り立つ。

したがって ① は $n \geqq 4$ となるすべての自然数について成り立つことが示された。

(3) $n \geqq 4$ となる自然数とする。

(1) から a_n は自然数である。

次に (2) の証明の途中式 ③ から

$$a_{n+1} = \frac{2\,(2n+1)}{n+2} a_n \quad \text{より}$$

$$(n+2)\,a_{n+1} = (4n+2)\,a_n \cdots ⑤ \quad \text{となる。}$$

また，③，④ から

$$a_{n+1} > a_n \cdots ⑥,\ a_{n+1} > 4n+2 \cdots ⑦$$

もわかる。

ここで a_{n+1} が素数と仮定すると ⑤ の左辺は，素数 a_{n+1} の倍数となるので，右辺の 2 つの因数 $4n+2$，a_n は素数 a_{n+1} の倍数となるが，⑥，⑦ に矛盾する。

◀ 予想通り「背理法」

したがって「$n \geqq 4$ のとき，a_{n+1} は素数とはならない。」ことが示されたので，$n = 1, 2, 3, 4$ のときの a_n を計算し

$$a_1 = \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{1} = 1$$

$$a_2 = \frac{{}_4\mathrm{C}_1}{2} = 2$$

$$a_3 = \frac{{}_6\mathrm{C}_2}{3} = 5$$

$$a_4 = \frac{{}_8\mathrm{C}_3}{4} = 14$$

求める自然数 n は $n = \mathbf{2}, \mathbf{3}$ に限る。

$\boxed{4}$ S を，座標空間内の原点 O を中心とする半径 1 の球面とする。S 上を動く点 A，B，C，D に対して

$$F = 2\,(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2) - 3\,(\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2 + \mathrm{CD}^2)$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とするとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ によらない定数 k によって

$$F = k\,(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{d})$$

と書けることを示し，定数 k を求めよ。

(2) 点 A，B，C，D が球面 S 上を動くときの，F の最大値 M を求めよ。

(3) 点 C の座標が $\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$，点 D の座標が $(1,\ 0,\ 0)$ であるとき，$F = M$ となる S 上の点 A，B の組をすべて求めよ。

(1) $F = 2\,(|\vec{b} - \vec{a}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{c}|^2)$

$\quad - 3\,(|\vec{d} - \vec{a}|^2 + |\vec{d} - \vec{b}|^2 + |\vec{d} - \vec{c}|^2)$

$= 2\,(2\vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{b}\cdot\vec{b} + 2\vec{c}\cdot\vec{c} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}\cdot\vec{c} - 2\vec{c}\cdot\vec{a})$

$\quad -3\,(\vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{c}\cdot\vec{c} + 3\vec{d}\cdot\vec{d} - 2\vec{a}\cdot\vec{d} - 2\vec{b}\cdot\vec{d} - 2\vec{c}\cdot\vec{d})$

$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{c}\cdot\vec{c} - 9\vec{d}\cdot\vec{d}$

$\quad + 2\,(-2\,(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}) + 3\,(\vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{d} + \vec{c}\cdot\vec{d}))$

$= -6 + 2\,(-2\,(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}) + 3\,(\vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{d} + \vec{c}\cdot\vec{d}))$

一方

$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{d})$

$= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - 3\,(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot\vec{d}$

$= 1 + 1 + 1 + 2\,(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}) - 3\,(\vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{d} + \vec{c}\cdot\vec{d})$

したがって $\boldsymbol{k = -2}$ とすることで与えられた式を書きなおすことができる。

(2) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ とする。(1) から

$$F = -2\vec{x}\cdot(\vec{x} - 3\vec{d})$$

$$= -2\left|\vec{x} - \frac{3}{2}\vec{d}\right|^2 + \frac{9}{2}|\vec{d}|^2$$

◀ ここで満足して $M = \dfrac{9}{2}$ としてはいけません

$\vec{x} = \dfrac{3}{2}\vec{d}$ すなわち $\dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \dfrac{1}{2}\vec{d}$ となるような $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ の組が存在すれば $M = \dfrac{9}{2}|\vec{d}|^2 = \dfrac{9}{2}$ となる。

ここで，平面 $z = \dfrac{1}{2}$ と S の共有点となる円周上に 3 点 A，B，C が正三角形の頂点となるようにとると，$\dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

球面 S 上に，点 D を $(0,\,0,\,1)$ をとると，条件を満たすので

$$\boldsymbol{M=\frac{9}{2}}$$

(3)　$\mathrm{A}\,(a_1,\,a_2,\,a_3)$，$\mathrm{B}\,(b_1,\,b_2,\,b_3)$ とする。A，B は S 上にあるので

$${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2=1 \cdots ①$$

$${b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2=1 \cdots ②$$

(2) から $F=M$ となる条件は

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1}{2}\vec{d}$$

$$2\,(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=3\,\vec{d}$$

$$2\,(\vec{a}+\vec{b})=3\,\vec{d}-2\,\vec{c}$$

$$2\,(a_1+b_1,\,a_2+b_2,\,a_3+b_3)=\left(\frac{7}{2},\,-\frac{\sqrt{15}}{2},\,0\right)$$

ベクトルの相等から

$$a_1+b_1=\frac{7}{4} \cdots ③$$

$$a_2+b_2=-\frac{\sqrt{15}}{4} \cdots ④$$

$$a_3+b_3=0 \cdots ⑤$$

◀ このままでは，未知数 $a1$〜b_6 の 6 個に対して方程式が ①〜⑤ の 5 本しかないので解けない

$③^2+④^2+⑤^2$ と ①，② から

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=1 \cdots ⑥$$

ここで ①，②，⑥ から

◀ 試行錯誤した窮余の策(実数条件)

$$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2=1-2+1=0$$

a_1-b_1，a_2-b_2，a_3-b_3 は実数から

$$a_1=b_1 \quad \text{かつ} \quad a_2=b_2 \quad \text{かつ} \quad a_3=b_3$$

③，④，⑤ から

$$\boldsymbol{\mathrm{A}\left(\frac{7}{8},\,-\frac{\sqrt{15}}{8},\,0\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{7}{8},\,-\frac{\sqrt{15}}{8},\,0\right)}$$

5 xy 平面上の円 C : $x^2+(y-a)^2=a^2$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 円 C が $y \geqq x^2$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ。

(2) 円 C が $y \geqq x^2-x^4$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ。

(3) a が (2) の範囲にあるとする。xy 平面において連立不等式

$$|x| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0 \leqq y \leqq \frac{1}{4},\quad y \geqq x^2-x^4,\quad x^2+(y-a)^2 \geqq a^2$$

で表される領域 D を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(1) • $a=0$ のときは C は円を表さないので不適。

• $a<0$ のとき C 上の点 $(0, 2a)$ は $y \geqq x^2$ に含まれないので不適。

◀ 予め排除すべき範囲を明記すると読みやすい

したがって $a>0$ で考える。

このとき円 C の半径は a であり，中心を $\mathrm{P}(0, a)$ とする。領域の境界 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{Q}(q, q^2)$ について，常に $\mathrm{PQ} \geqq a$ であれば円 C が領域 $y \geqq x^2$ に含まれることになる。

◀ 円がある領域に含まれる条件

$$\mathrm{PQ}^2 \geqq a^2$$

$$q^2+(q^2-a)^2 \geqq a^2$$

$$q^4+(1-2a)q^2 \geqq 0$$

これが，任意の q について成り立つ条件を求める。

$q=0$ のとき，任意の a について成り立つ。

$q \fallingdotseq 0$ のとき両辺を $q^2(>0)$ で割り

$$q^2 \geqq 2a-1$$

これが任意の $q\,(\fallingdotseq 0)$ で成り立つには，$2a-1 \leqq 0$

したがって，求める a の範囲は $\boldsymbol{0<a \leqq \frac{1}{2}}$

(2) (1) と同様な理由で $a>0$ のみ考えてよい。

境界 $y=x^2-x^4$ 上の点 $\mathrm{R}(r, r^2-r^4)$ について同様に

$$\mathrm{PR} \geqq a \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{PR}^2 \geqq a^2$$

$$r^2+(r^2-r^4-a)^2 \geqq a^2$$

$$r^2+r^4+r^8+a^2-2r^6+2ar^4-2ar^2 \geqq a^2$$

$$r^8-2r^6+(1+2a)r^4+(1-2a)r^2 \geqq 0$$

$r=0$ のとき，任意の a について成り立つ。

$r \fallingdotseq 0$ のとき，両辺を $r^2\,(>0)$ で割り

$$r^6-2r^4+(1+2a)r^2 \geqq 2a-1$$

$r^2 \to +0$ のとき（左辺）$\to 0$ から必要条件は $2a-1 \leqq 0$

ところが，$0<a \leqq \frac{1}{2}$ のときには (1) から C が $y \geqq x^2$ に含ま

れることが示され，また，$x^2 \geqq x^2 - x^4$ から領域 $y \geqq x^2 - x^4$ は $y \geqq x^2$ を含むので，結果 C が $y \geqq x^2 - x^4$ に含まれることがわかる。

したがって，求める a の範囲は $\boldsymbol{0 < a \leqq \frac{1}{2}}$

(3) $(x) = x^2 - x^4$ とする。$f'(x) = 2x - 4x^3 = 2x\left(1 - 2x^2\right)$ から増減表は次の通り

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

求める体積を V とする。

- $0 < a \leqq \frac{1}{8}$ のとき，C は $y \geqq x^2 - x^4$ かつ $0 \leqq y \leqq \frac{1}{4}$ に含まれる。領域および円が y 軸について対称であるから

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{1}{4}} \pi x^2\,dy - \frac{4}{3}\pi a^3 \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi x^2 \frac{dy}{dx}\,dx - \frac{4}{3}\pi a^3 \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi x^2\left(2x - 4x^3\right)dx - \frac{4}{3}\pi a^3 \\ &= \pi\left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^6\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{4}{3}\pi a^3 \\ &= \frac{1}{24}\pi - \frac{4}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$

- $\frac{1}{8} < a \leqq \frac{1}{4}$ のとき，C の方程式は $x^2 = a^2 - (y-a)^2$ とでき

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{1}{4}} \pi x^2\,dy - \int_0^{\frac{1}{4}} \pi x^2\,dy \\ &= \frac{1}{24}\pi - \pi\int_0^{\frac{1}{4}} \left(-y^2 + 2ay\right)dy \\ &= \frac{1}{24}\pi - \pi\left[-\frac{1}{3}y^3 + ay^2\right]_0^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{24}\pi - \pi\left\{-\frac{1}{192} + \frac{1}{16}a\right\} \\ &= \frac{3}{64}\pi - \frac{1}{16}\pi a \end{aligned}$$

したがって
$0 < a \leqq \frac{1}{8}$ のとき　$\frac{1}{24}\pi - \frac{4}{3}\pi a^3$
$\frac{1}{8} < a \leqq \frac{1}{4}$ のとき　$\frac{3}{64\pi} - \frac{1}{16}\pi a$