1 a を正の実数とする。座標平面上の曲線 C を $y = ax^3 - 2x$ で定める。原点を中心とする半径 1 の円と C の共有点の個数が 6 個であるような a の範囲を求めよ。

円を K とし，その方程式を $x^2 + y^2 = 1$ とする。

C および K はともに原点 $\mathrm{O}(0,0)$ について対称であり，$x = 0$ で C と K は共有点をもたない。

したがって $x > 0$ の範囲で C と K が 3 個の共有点をもつ a の範囲を求める。

◀ (原)点対称な 2 つの図形の共有点が 6 個であるということは

y を消去した方程式

$$x^2 + (ax^3 - 2x)^2 = 1 \cdots ①$$

① を $a^2x^6 - 4ax^4 + 5x^2 - 1 = 0 \cdots ②$ として，② の左辺を $f(x)$ とする。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6a^2x^5 - 16ax^3 + 10x \\ &= 2x(3a^2x^4 - 8ax^2 + 5) \\ &= 2x(ax^2 - 1)(3ax^2 - 5) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ となるのは $x > 0$ の範囲で $x = \sqrt{\dfrac{1}{a}}, \sqrt{\dfrac{5}{3a}}$ である。

簡単のため $\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{a}}$，$\beta = \sqrt{\dfrac{5}{3a}}$ とする。

$\alpha > 0$，$\beta > 0$ であり $\beta^2 - \alpha^2 = \dfrac{5-3}{3a} > 0$ から $\alpha < \beta$

このとき $x > 0$ における増減表は

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	-1	↗	$f(\alpha)$	↘	$f(\beta)$	↗

満たすべき必要十分条件は $f(\alpha) > 0 \cdots ③$ かつ $f(\beta) < 0 \cdots ④$

③ は

$$a^2\left(\frac{1}{a}\right)^3 - 4a\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{a}\right) - 1 > 0$$

$2 - a > 0$ すなわち $a < 2 \cdots ⑤$

④ は

$$a^2\left(\frac{5}{3a}\right)^3 - 4a\left(\frac{5}{3a}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{3a}\right) - 1 < 0$$

$$5^3 - 4 \cdot 5^2 \cdot 3 + 5 \cdot 5 \cdot 3^2 - 27a < 0$$

$50 - 27a < 0$ すなわち $a > \dfrac{50}{27} \cdots ⑥$

求める範囲は ⑤，⑥ の共通範囲である $\boldsymbol{\dfrac{50}{27} < a < 2}$

2 N を 5 以上の整数とする。1 以上 $2N$ 以下の整数から，相違なる N 個の整数を選ぶ。ただし 1 は必ず選ぶこととする。選んだ数の集合を S とし，S に関する以下の条件を考える。

条件 1： S は連続する 2 個の整数からなる集合を 1 つも含まない。

条件 2： S は連続する $N-2$ 個の整数からなる集合を少なくとも 1 つ含む。

ただし，2 以上の整数 k に対して，連続する k 個の整数からなる集合とは，ある整数 ℓ を用いて $\{\ell, \ell+1, \cdots, \ell+k-1\}$ と表される集合を指す。例えば $\{1,2,3,5,7,8,9,10\}$ は連続する 3 個の整数からなる集合 $\{1,2,3\}$，$\{7,8,9\}$，$\{8,9,10\}$ を含む。

(1) 条件 1 を満たすような選び方は何通りあるか。

(2) 条件 2 を満たすような選び方は何通りあるか。

(1) 条件を満たす S は次のいずれかである。

- $S=\{\underbrace{1,\ 3,\ \cdots,\ 2N-1}_{N\text{ 個の連続した奇数}}\}$
- $S=\{\underbrace{1,\ 3,\ \cdots,\ 2k-1}_{1\text{ 個以上連続した奇数}},\ \underbrace{2k+2, 2k+4, \cdots, 2N}_{1\text{ 個以上連続した偶数}}\}$

各々の場合の数は 1，$N-1$ より，求める場合の数は

$1+(N-1)=$ **N（通り）**

(2) 条件を満たす S の部分集合を S' とし，S' の要素の最小値を m として考える。

- $m=1$ のとき $S'=\{1,\ 2,\ \cdots,\ N-2\}$ と $N-2$ 個の要素をとり残りの 2 つの要素を $N-1,\ N,\ \cdots,\ 2N$ の $N+2$ 個の中から選べばよいので，場合の数は ${}_{N+2}\mathrm{C}_2=\dfrac{(N+2)(N+1)}{2}$
- $m=2$ のとき $S'=\{2,\ 3,\ \cdots,\ N-1\}$ となるが $\{1\}\cup S'$ も条件 2 を満たす部分集合となり，$m=2$ に矛盾する。したがって $m=2$ となることはない。

◀ $m=2$ となることがないことに気づく!!

- $m \geqq 3$ のとき $S'=\{m, m+1, \cdots, m+(N-2)-1\}$ とする。ここで，最大の要素から $m+N-3 \leqq 2N$ より

$$3 \leqq m \leqq N+3$$

$\{1\}\cup S'$ に属する $N-1$ 個の要素の他の 1 個は $m-1$ 以外の N 個の要素から 1 個選べばよいので場合の数は $N(N+1)$

求める場合の数は $\dfrac{(N+2)(N+1)}{2}+N(N+1)$

すなわち **$\dfrac{1}{2}(N+1)(3N+2)$（通り）**

3 a，b を実数とする。座標平面上の放物線

$$C\ :\ y=x^2+ax+b$$

は放物線 $y=-x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1<x<0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0<x<1$ を満たす。

(1) 点 (a,b) のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(1) $f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=-x^2$ とする。

放物線 $C\ :\ y=f(x)$ は下に凸，$y=g(x)$ は上に凸から，求める条件は

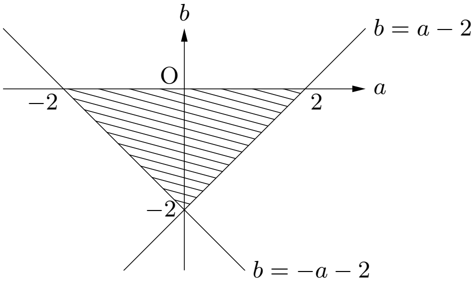
◀ いわゆる解の配置

$$\begin{cases} g(-1)<f(-1)\ \cdots ① \\ g(0)>f(0)\ \cdots ② \\ g(1)<f(1)\ \cdots ③ \end{cases}$$

① は $0>b$，② は $-1<1-a+b$ すなわち $b>a-2$，

③ は $-1<1+a+b$ すなわち $b>-a-2$

(a,b) の範囲は下図の斜線部で境界はすべて含まない。



(2) C の方程式を $b=-xa+y-x^2\ \cdots ④$ とし，

ab 平面上で傾き $-x$，b 切片が $y-x^2$ の直線と考える。

◀ ab 平面上では変数を係数とする直線

- $-x\geqq 1$ すなわち $x\leqq -1$ のとき

$$2x<y-x^2<-2x \quad から \quad x^2+2x<y<x^2-2x$$

- $-x\leqq -1$ すなわち $x\geqq 1$ のとき

$$-2x<y-x^2<2x \quad から \quad x^2-2x<y<x^2+2x$$

- $x=0$ のとき

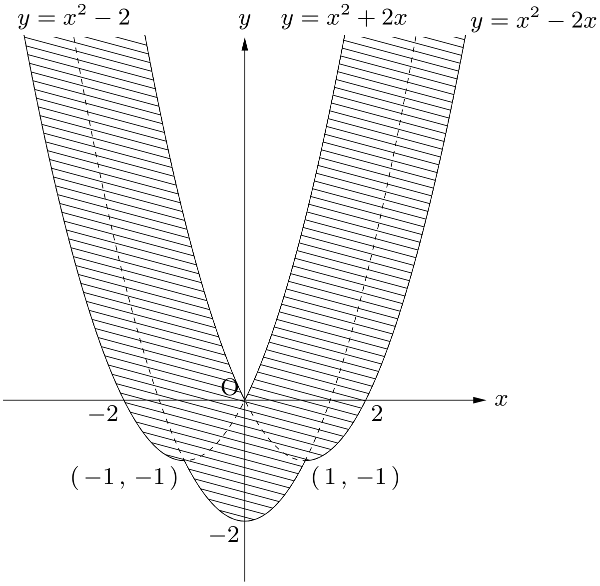
$$-2<y-x^2<0 \quad から \quad x^2-2<y<x^2$$

- $0<-x\leqq 1$ すなわち $-1\leqq x<0$ のとき

$$-2<y-x^2<2x \quad から \quad x^2-2<y<x^2+2x$$

- $-1<-x\leqq 0$ すなわち $0\leqq x<1$ のとき

$$-2<y-x^2<-2x \quad から \quad x^2-2<y<x^2-2x$$



図の斜線部で境界はすべて含まない

4 以下の問いに答えよ。

(1) 正の奇数 K，L と正の整数 A，B が $KA=LB$ を満たしているとする。K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば，A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(2) 正の整数 a，b が $a>b$ を満たしているとする。このとき，$A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B={}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して $KA=LB$ となるような正の奇数 K，L が存在することを示せ。

(3) a，b は (2) の通りとし，さらに $a-b$ が 2 で割りきれるとする。${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(4) ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。

(1) 0 以上の整数 m，n を用いて $K=4m+r$，$L=n+r$
ただし $r=1,3$ とできる。 $KA=LB$ となるとき

$$(4m+r)\,A=(4n+r)\,B$$

$$4\,(mA-nB)=r\,(B-A)\ \cdots ①$$

$mA-nB$，$B-A$，r は整数であり，① の左辺は 4 の倍数である。

① の右辺も 4 の倍数であるが，r は 4 とは互いに素であるので $B-A$ が 4 の倍数ということとなる。

したがって A を 4 で割った余りと B を 4 で割った余りは等しい。

(2) $a=4$，$b=3$ すなわち $A={}_{17}\mathrm{C}_{13}$ を例にして

$$A=\frac{17\times16\times15\times14\times13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5}{13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$=\frac{17\cdot13\cdot9\cdot5}{13\cdot9\cdot5\cdot1}\times\frac{14\cdot10\cdot6}{10\cdot6\cdot2}\times\frac{15\cdot11\cdot7}{11\cdot7\cdot3}\times\frac{16\cdot12\cdot8}{12\cdot8\cdot4}$$

と 4 つの分数の積に分ける。それぞれの項は 4 で割った余りが 1, 2, 3, 0 となるものを集めている。

一般に

$$A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$$

$$=\frac{(4a+1)\,4a\,(4a-1)\cdots(4\,(a-b)+1)}{(4b+1)\,4b\,(4b-1)\cdots3\cdot2\cdot1}$$

$$=\frac{\overbrace{(4a+1)\cdot(4\,(a-1)+1)\cdot\cdots\cdot(4\,(a-b)+1)}^{(ア)}}{\underbrace{(4b+1)\cdot(4\,(b-1)+1)\cdot\cdots\cdot5\cdot1}_{(イ)}}$$

$$\times \frac{\overbrace{(4(a-1)+2)\cdot(4(a-2)+2)\cdot\cdots\cdot(4(a-b)+2)}^{(ウ)}}{\underbrace{(4(b-1)+2)\cdot(4(b-2)+2)\cdot\cdots\cdot 6\cdot 2}_{(エ)}}$$

$$\times \frac{\overbrace{(4(a-1)+3)\cdot(4(a-2)+3)\cdot\cdots\cdot(4(a-b)+3)}^{(オ)}}{\underbrace{(4(b-1)+3)\cdot(4(b-2)+3)\cdot\cdots\cdot 7\cdot 3}_{(カ)}}$$

$$\times \frac{\overbrace{(4a)\cdot 4(a-1)\cdot\cdots\cdot 4(a-b+1)}^{(キ)}}{\underbrace{4b\cdot 4(b-1)\cdot\cdots\cdot 8\cdot 4}_{(ク)}}$$

として考える。(ア), (イ), (オ), (カ)はそれぞれいくつかの奇数の積なので奇数である。それぞれの値を $O_ア$, $O_イ$, $O_オ$, $O_カ$ とする。

◀ O : Odd(奇数の意)

(ウ), (エ)について, b 個の偶数の積になっているが約分して

$$\frac{(ウ)}{(エ)} = \frac{(2(a-1)+1)\cdot(2(a-2)+1)\cdot\cdots\cdot(2(a-b)+1)}{(2(b-1)+1)\cdot(2(b-2)+1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}$$

右辺の分子, 分母は奇数の積なので奇数である。その値をそれぞれ $O_ウ$, $O_エ$ とする。

最後に(キ), (ク)について, b 個の 4 の倍数の積になっているが約分して

$$\frac{(キ)}{(ク)} = \frac{a\cdot(a-1)\cdot\cdots\cdot(a-b+1)}{b\cdot(b-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1} = {}_a\mathrm{C}_b = B$$

以上から

$$A = \frac{O_ア}{O_イ} \times \frac{O_ウ}{O_エ} \times \frac{O_オ}{O_カ} \times B$$

したがって $K = O_イ \times O_エ \times O_カ$, $L = O_ア \times O_ウ \times O_オ$ とすれば K, L は奇数であり $KA = LB$ が成り立つ。

(3) (2) で用いた記号を継続する。$O_ア$ と $O_イ$ はそれぞれ 4 を法として 1 となる $b+1$ 個の積なので, $O_ア$ と $O_イ$ は 4 を法として合同。

$O_オ$ と $O_カ$ はそれぞれ 4 を法として 3 となる b 個の積なので, $O_オ$ と $O_カ$ は 4 を法として合同。

そして $O_ウ$ の初項 $2(a-1)+1$ と $O_エ$ の初項 $2(b-1)+1$ の差は

$$(2(a-1)+1)-(2(b-1)+1) = 2(a-b)$$

となり, $a-b$ が 2 で割り切れるとき, 先の 2 項は 4 を法として合同となる。2 項目以降も同じ議論から $a-b$ が 2 で割りきれるなら $O_ウ$ と $O_エ$ は 4 を法として合同であることが示された。

以上のことから $K = O_イ \times O_エ \times O_カ$ と $L = O_ア \times O_ウ \times O_オ$ は 4 を法として合同なので, (1) から ${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ と ${}_a\mathrm{C}_b$ は 4 を法として合同であることが示された。

(4) $2021 = 4 \times 505 + 1$, $37 = 4 \times 9 + 1$, $505 \equiv 9 \pmod 2$

(3) より ${}_{2021}\mathrm{C}_{37} \equiv {}_{505}\mathrm{C}_9 \pmod 4$

さらに $505 = 4 \times 126 + 1$, $9 = 4 \times 2 + 1$, $126 \equiv 2 \pmod 2$

同様に ${}_{505}\mathrm{C}_9 \equiv {}_{126}\mathrm{C}_2 \pmod 4$

したがって，求める余りは

${}_{126}\mathrm{C}_2 = \dfrac{126\times125}{2\times1} = 63 \times 125$ を 4 で割った余りの **3**