$\boxed{\mathbf{1}}$ $a,\ b$ を実数とする。曲線 $y = ax^2 + bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 $(a\,,\,b)$ の領域を図示せよ。

$a^2 + bx + 1 = f(x)$ とする。

曲線 $y = f(x)$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないことを，条件(＊)とする。

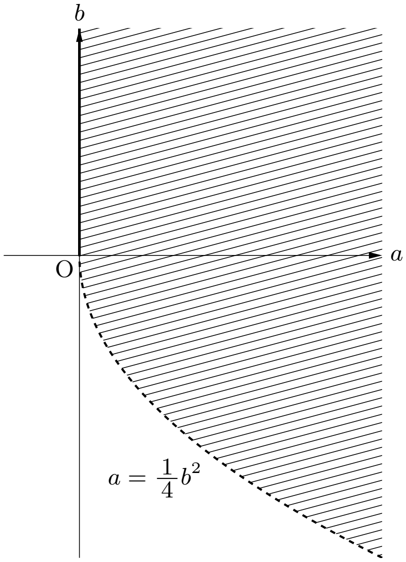
また，$a \fallingdotseq 0$ のとき，放物線 $y = f(x)$ の軸の方程式は $x = -\dfrac{b}{2a}$，

そして $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-b^2 + 4a}{4a}$ を用いると

◀ 問題文に「2 次関数」，「放物線」とあれば無条件で $a \fallingdotseq 0$ を示す。
本問の場合は「曲線」は「直線」を含むので注意する

- $a = 0$ のとき
  - $b \geqq 0$ のとき $f(0) = 1 > 0$ から(＊)を満たす。
  - $b < 0$ のとき $f(0) > 0$ から(＊)を満たさない。
- $a < 0$ のとき $f(0) > 0$ から (＊)を満たさない。
- $a > 0$ のとき
  - (軸) $\leqq 0$ すなわち $b \geqq 0$ のとき $f(0) > 0$ から(＊)を満たす。
  - $0 <$ (軸) すなわち $b < 0$ のとき(＊)を満たすべき条件は
    (頂点の y 座標) > 0 から $\dfrac{-b^2 + 4a}{4a} > 0$ すなわち $a > \dfrac{1}{4}b^2$

ab 平面に図示すると



図の斜線部で境界は $b \geqq 0$ の部分は含み，$b < 0$ の部分は含まない。

2 a, b を $0<a<1$, $0<b<1$ を満たす実数とする。平面上の三角形 ABC を考え，辺 AB を $a:1-a$ に内分する点を P，辺 BC を $b:1-b$ に内分する点を Q，辺 CA の中点を R とし，三角形 ABC の面積を S，三角形 PQR の面積を T とする。

(1) $\dfrac{T}{S}$ を a, b で表せ。

(2) a, b が $0<a<\dfrac{1}{2}$, $0<b<\dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$\dfrac{T}{S}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) p, q を 3 以上の整数とし，$a=\dfrac{1}{p}$, $b=\dfrac{1}{q}$ とする。$\dfrac{T}{S}$ の逆数 $\dfrac{S}{T}$ が整数となるような p, q の組 (p, q) をすべて求めよ。

(1) $\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{ABC}-(\triangle\mathrm{APR}+\triangle\mathrm{BQP}+\triangle\mathrm{CRQ})$ から

$$\begin{aligned} T &= S-\left(\frac{1}{2}aS+(1-a)bS+\frac{1}{2}(1-b)S\right) \\ &= \frac{1}{2}S\{2-(a+2b-2ab+1-b)\} \\ &= \frac{1}{2}S(2ab-a-b+1) \end{aligned}$$

したがって $\dfrac{T}{S}=\boldsymbol{ab-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{2}b+\dfrac{1}{2}}$

(2)
$$\begin{aligned} \frac{T}{S} &= ab-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)+\frac{1}{4} \end{aligned}$$

条件のもとで，$0<\dfrac{1}{2}-a<\dfrac{1}{2}$ と $0<\dfrac{1}{2}-b<\dfrac{1}{2}$ は独立してとれるので，$0<\left(\dfrac{1}{2}-a\right)\left(\dfrac{1}{2}-b\right)<\dfrac{1}{4}$ から

$0+\dfrac{1}{4}<\dfrac{T}{S}<\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}$ すなわち $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}<\dfrac{T}{S}<\dfrac{1}{2}}$

(3) $p\geqq 3$, $q\geqq 3$ のとき $0<a<\dfrac{1}{2}$, $0<b<\dfrac{1}{2}$ を満たすので，

(2) から $\dfrac{1}{4}<\dfrac{T}{S}<\dfrac{1}{2}$ すなわち $2<\dfrac{S}{T}<4$

これを満たす整数値は $\dfrac{S}{T}=3$ に限る。$\dfrac{T}{S}=\dfrac{1}{3}$ であり

$$\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{3} \quad \text{を解く}$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

◀ この辺りまでくると，整数問題の常道

$$3(p-2)(q-2)=pq$$

$$pq-3p-3q+6=0$$

$$pq-3p-3q+9=-6+9$$

$$(p-3)(q-3)=3$$

$p\geqq 3$, $q\geqq 3$ を考慮して整数の組は

$(p-3, q-3)=(1, 3), (3, 1)$

すなわち $(p,\ q)=(4,\ 6),\ (6,\ 4)$ であり，これは題意を満たす。

3 正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形であるものの個数を求めよ。

(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ。

(3) 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，次の条件(*)を満たすものの個数を求めよ。

(*) 四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる。

最大の長さをもつ 4 本の対角線 A_1A_5，A_2A_6，A_3A_7，A_4A_8 をそれぞれ L_1，L_2，L_3，L_4 とする。

(1) 直角三角形には必ず L_i $(i=1, 2, 3, 4)$ のいずれかが含まれている。

◀ 問題文を読んで，(最長の)対角線で場合分けしやすい

L_1 が含まれている場合，他の頂点は A_2，A_3，A_4，A_6，A_7，A_8 のいずれかであるから 6 個ある。

L_2，L_3，L_4 についても同様で，重複するものはないので

直角三角形は $6\times4=$ **24 個**

(2) 8 個の頂点から 3 個の頂点を結んでできる三角形は

全部で ${}_8C_3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$ 個ある。

そのうち直角三角形は 24 個ある。

二等辺三角形については

A_1 を頂点とする二等辺三角形の他の 2 つの頂点は，

A_2 と A_8，A_3 と A_7，A_4 と A_6 の 3 個ある。

◀ この問題では関係ないが，頂点の個数が 3 の倍数のときは，正三角形ができるので重複することに注意する

他の頂点も同様であり，重複するものはないので

二等辺三角形は全部で $3\times8=24$ 個ある。

直角二等辺三角形については

L_1 を含むとき，もう 1 つの頂点は A_3 または A_7 の 2 個ある。

他についても同様で，重複するものはないから，

直角二等辺三角形は全部で $2\times4=8$ 個ある。

以上から求める個数は

$$56-(24+24-8)=\textbf{16 個}$$

(3) (*)を満たす四角形は，辺または対角線に L_i $(i=1, 2, 3, 4)$ を含まなければならない。

L_i，L_j の 2 つを含む四角形は ${}_4C_2=6$ 個ある。

L_1 を含む四角形の他の 2 つの頂点は，A_2，A_3，A_4，A_6，A_7，A_8 の 6 個から 2 個選んだものなので，${}_6C_2=15$ 個ある。

以上から求める個数は

$$15\times4-6=\textbf{54 個}$$

4 座標平面において，次の条件(＊)を満たす直線 ℓ を考える。

(＊) ℓ の傾きは 1 で，曲線 $y = x^3 - 2x$ と異なる 3 点で交わる。

その交点を x 座標が小さいものから順に P，Q，R とし，さらに線分 PQ の中点を S とする。

(1) 点 R の座標を $(a, a^3 - 2a)$ とするとき，点 S の座標を求めよ。

(2) 直線 ℓ が条件(＊)を満たしながら動くとき，点 S の軌跡を求めよ。

(3) 直線 ℓ が条件(＊)を満たしながら動くとき，線分 PS が動いてできる領域の面積を求めよ。

(1) $y = x^3 - 2x \cdots$ ① の接線のうち，傾きが 1 であるものは，

$y' = 3x^2 - 2 = 1$ を解いて $x = \pm 1$

$(1, -1)$ における接線は $y = x - 2$,

$(-1, 1)$ における接線は $y = x + 2$ から

(＊)を満たす ℓ は $y = x + k \cdots$ ② $(-2 < k < 2)$ となる。

このとき方程式

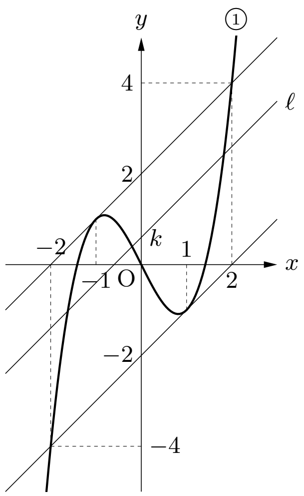
$$x^3 - 2x = x + k \cdots ③$$

は異なる 3 つの実数解をもち，

小さい順に c, b, a とすると

$$-2 < c < -1,$$
$$-1 < b < 1,$$
$$1 < a < 2$$

となる。



◀ k のみ変数分離することもある(多い)が，わかりやすい形なので，このまま処理した。

③ を $x^3 - 3x - k = 0$ とし

解と係数の関係から

$$a + b + c = 0 \cdots ④$$

$\mathrm{R}(a, a^3 - 2a)$ のとき,

$\mathrm{P}(c, c^3 - 2c)$，$\mathrm{Q}(b, b^3 - 2b)$

ここで R が ② 上にあるのでから

$a^3 - 2a = a + k$ より $k = a^3 - 3a$ となり

② は $y = x + a^3 - 3a \cdots$ ⑤ とできる。

$\mathrm{S}(x, y)$ とすると $x = \dfrac{c + b}{2} = -\dfrac{a}{2}$ $(\because$ ④$)$

S は ⑤ 上にあるので $y = -\dfrac{a}{2} + a^3 - 3a = a^3 - \dfrac{7}{2}a$

したがって求める座標は **$\mathrm{S}\left(-\dfrac{a}{2}, a^3 - \dfrac{7}{2}a\right)$**

(2) (1) の結果を用い $\mathrm{S}(x, y)$ とすると,

$$\begin{cases} x = -\dfrac{a}{2} \cdots ⑥ \\ y = a^3 - \dfrac{7}{2}a \cdots ⑦ \end{cases}$$

⑥ から $a=-2x$ を ⑦ に代入し

$$y=(-2x)^3-\frac{7}{2}(-2x)=-8x^3+7x$$

また，$1<a<2$ から $-1<x<-\dfrac{1}{2}$

◀ x の範囲を忘れない

したがって S の軌跡は $\boldsymbol{y=-8x^3+7x\ \left(-1<x<-\dfrac{1}{2}\right)}$

(3) 線分 PQ が通過する範囲は，① と $y=x-2$ で囲まれた境界を含まれない部分であるので，この面積は

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{1}\{(x^3-2x)-(x-2)\}\,dx\\
&=\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)^2\,dx\\
&=\int_{-2}^{1}\left\{(x-1+3)\,(x-1)^2\right\}dx\\
&=\int_{-2}^{1}\left\{(x-1)^3+3(x-1)^2\right\}dx\\
&=\left[\frac{1}{4}(x-1)^4+(x-1)^3\right]_{-2}^{1}\\
&=-\left(\frac{81}{4}-27\right)\\
&=\frac{27}{4}
\end{aligned}$$

◀ 被積分関数がこの形に因数分解されるのは当然
積分しやすい形に変形する

これは線分 PS と線分 QS の通過する領域の面積で，
両者の面積は等しいから求める面積は $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{27}{4}=\boldsymbol{\dfrac{27}{8}}$

◀ カヴァリエリの原理

5 z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 O(0)，A(z)，B(z^2) について，以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 O，A，B が同一直線上にあるための z の必要十分条件を求めよ。

(2) 3 点 O，A，B が二等辺三角形の頂点になるような z 全体を複素数平面上に図示せよ。

(3) 3 点 O，A，B が二等辺三角形の頂点であり，かつ z の偏角 θ が $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ を満たすとき，三角形 OAB の面積の最大値とそのときの z の値を求めよ。

(1) $|z| = 0$ すなわち $z = 0$ のとき，O，A，B は一致し同一直線上にある。

◀ 例外処理を先に施した

$|z| \neq 0$ のとき $\arg z = \theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とすると $\arg z^2 = 2\theta$

◀ 図形的意味を考えて計算する

鈍角になる場合を含め $\angle\mathrm{AOB} = 2\theta - \theta = \theta$ であり，

3 点 O，A，B が同一直線上にあるとき $\angle\mathrm{AOB} = \theta = 0, \pi$

したがって，求める必要十分条件は **z が実数**となることである。

(2) 二等辺三角形となるとき，(1) での条件をもとに

- OA = OB となるとき

$$|z| = |z^2|$$

$$|z| = |z|^2$$

$$|z| = 1 \cdots ① \qquad (\because |z| \neq 0)$$

- AO = AB となるとき

$$|-z| = |z^2 - z|$$

$$|z| = |z||z-1|$$

$$|z-1| = 1 \cdots ② \qquad (\because |z| \neq 0)$$

- BO = BA のとき

$$|-z^2| = |z - z^2|$$

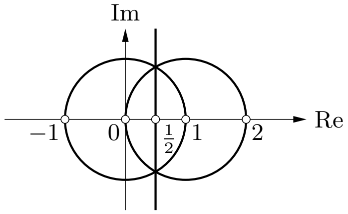
$$|z|^2 = |z||z-1|$$

$$|z| = |z-1| \cdots ③ \qquad (\because |z| \neq 0)$$

① は中心 0，半径 1 の円，② は中心 1，半径 1 の円，

③ は 2 点 0，1 を結ぶ線分の垂直二等分線である。

z が実数である場合を除き図示すると下の図になる。



(3)　のとき z は ①，②，③ のいずれの上にもあるが，θ を固定したとき $\triangle$OAB の面積は OA の長さに依存するので z が ② 上にあるときを考える。

このとき $\mathrm{OA} = |z| = 2\cos\theta$，$\mathrm{OB} = |z^2| = 4\cos^2\theta$

$\triangle\mathrm{OAB} = S(\theta)$ とすると $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ から

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta$$

$$\begin{aligned} S'(\theta) &= 4\left\{3\cos^2\theta(\cos\theta)'\cdot\sin\theta + \cos^3\theta\cdot\cos\theta\right\} \\ &= 4\cos^2\theta\,(-3\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= 4\cos^2\theta\,(1 - 4\sin^2\theta) \\ &= 4\cos^2\theta\,(1 + 2\sin\theta)(1 - 2\sin\theta) \end{aligned}$$

$0 < \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ の範囲で増減表は

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	

したがって求める最大値は $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$

このとき $|z| = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$，$\arg z = \theta = \frac{\pi}{6}$ から

$$z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \boldsymbol{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

6 以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ。ただし，e は自然対数の底とする。

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx$$

(2) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ。

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx \leqq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3) 不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n を求めよ。必要ならば $2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてもよい。

$I_n = \displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx$ とする。部分積分を用いて

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^a \left(\frac{-(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right)' e^x \, dx \\ &= \left[\frac{-(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x \right]_0^a - \int_0^a \left(\frac{-(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right) (e^x)' \, dx \\ &= \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1} \ \cdots ① \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^a \frac{(a-x)^1}{1!} e^x \, dx \\ &= \int_0^a (a-x) (e^x)' \, dx \\ &= \Big[(a-x) e^x \Big]_0^a - \int_0^a (a-x)' e^x \, dx \\ &= -a + \Big[e^x \Big]_0^a \\ &= -a + e^a - 1 \ \cdots ② \end{aligned}$$

(1) 数学的帰納法を用いて

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + I_n \ \cdots\cdots ⊛$$

が成り立つことを示す。

- $n = 1$ のとき

(右辺) $= 1 + a + T_1 = e^a$ ($\because$ ②)

となり ⊛ は成り立つ。

- $n=k$ のとき ㊟ が成り立つと仮定する。すなわち

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^k}{k!} + I_k \cdots ③$$

① を用いると ③ から直ちに

(③ の右辺)

$$= 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^k}{k!} + \frac{a^{k+!}}{(k+1)!} + I_{k+1} \cdots ④$$

となり ㊟ は $n = k+1$ のときにも成り立つ。

したがって，すべての自然数 n について，与えられた等式が成り立つことが示された。

(2) $0 \leqq x \leqq a$ のとき $e^0 \leqq e^x \leqq e^a$ であり，辺々 $\dfrac{(a-x)^n}{n!}$ (>0) 倍したものを，各々 $0 \leqq x \leqq a$ において積分すると

$$\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}\,dx \leqq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx \leqq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^a\,dx$$

$$(\text{左辺}) = \left[-\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^a = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$(\text{右辺}) = (\text{左辺}) \times e^a = \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

したがって与えられた不等式は成り立つ。

◀ 等号成立条件は(問われていないので，敢えて)記述しなかった

(3) ㊟ において $a=1$ とすると

$$I_n = e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \cdots ⑤$$

したがって，満たすべき条件は

$$I_n < 10^{-3} \cdots ⑥ \quad (\because\ I_n \geqq 0)$$

また，(2) の結果から

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqq I_n \leqq \frac{e}{(n+1)!} \cdots ⑦ \quad \text{となる。}$$

① から $I_{n+1} - I_n = -\dfrac{1}{(n+1)!} < 0$ より $\{I_n\}$ は単調減少である。

◀ $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ を計算するならば，この断りは不要
$(n+1)!$ が 10^3 に近い数を選んだ

$n=5$ とすると ⑦ は

$$\frac{1}{720} \leqq I_5 \leqq \frac{e}{720}$$

となり $10^{-3} = \dfrac{1}{1000} < \dfrac{1}{720}$ から ⑥ を満たさない。

$n=6$ とすると ⑦ は

$$\frac{1}{5040} \leqq I_6 \leqq \frac{e}{5040}$$

となり $\dfrac{e}{5040} < \dfrac{3}{5040} = \dfrac{1}{1680} < \dfrac{1}{1000}$ から ⑥ を満たす。

以上から，条件を満たす最小の正の整数は $\boldsymbol{n=6}$