1 a, b を実数とする。曲線 $y = ax^2 + bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 (a, b) の領域を図示せよ。

$a^2 + bx + 1 = f(x)$ とする。

曲線 $y = f(x)$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないことを，条件(✻)とする。

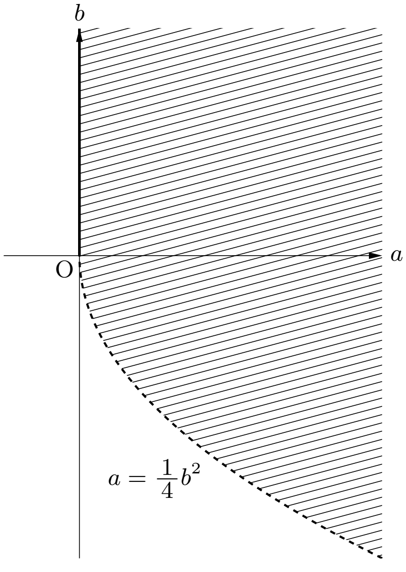
また，$a \fallingdotseq 0$ のとき，放物線 $y = f(x)$ の軸の方程式は $x = -\dfrac{b}{2a}$,

そして $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-b^2 + 4a}{4a}$ を用いると

- $a = 0$ のとき
  - $b \geqq 0$ のとき $f(0) = 1 > 0$ から(✻)を満たす。
  - $b < 0$ のとき $f(0) > 0$ から(✻)を満たさない。
- $a < 0$ のとき $f(0) > 0$ から (✻)を満たさない。
- $a > 0$ のとき
  - (軸) $\leqq 0$ すなわち $b \geqq 0$ のとき $f(0) > 0$ から(✻)を満たす。
  - $0 <$ (軸) すなわち $b < 0$ のとき(✻)を満たすべき条件は (頂点の y 座標) > 0 から $\dfrac{-b^2 + 4a}{4a} > 0$ すなわち $a > \dfrac{1}{4}b^2$

◀ 問題文に「2 次関数」,「放物線」とあれば無条件で $a \fallingdotseq 0$ を示す。
本問の場合は「曲線」は「直線」を含むので注意する

ab 平面に図示すると



図の斜線部で境界は $b \geqq 0$ の部分は含み，$b < 0$ の部分は含まない。

2 正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形であるものの個数を求めよ。

(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ。

(3) 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，次の条件(*)を満たすものの個数を求めよ。

(*) 四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる。

最大の長さをもつ 4 本の対角線 A_1A_5， A_2A_6， A_3A_7， A_4A_8 をそれぞれ L_1，L_2，L_3，L_4 とする。

(1) 直角三角形には必ず L_i $(i=1, 2, 3, 4)$ のいずれかが含まれている。

◀ 問題文を読んで，(最長の)対角線で場合分けしやすい

L_1 が含まれている場合，他の頂点は A_2，A_3，A_4，A_6，A_7，A_8 のいずれかであるから 6 個ある。

L_2，L_3，L_4 についても同様で，重複するものはないので

直角三角形は $6\times4=$ **24 個**

(2) 8 個の頂点から 3 個の頂点を結んでできる三角形は

全部で ${}_8C_3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$ 個ある。

そのうち直角三角形は 24 個ある。

二等辺三角形については

A_1 を頂点とする二等辺三角形の他の 2 つの頂点は，

A_2 と A_8，A_3 と A_7，A_4 と A_6 の 3 個ある。

他の頂点も同様であり，重複するものはないので

二等辺三角形は全部で $3\times8=24$ 個ある。

◀ この問題では関係ないが，頂点の個数が 3 の倍数のときは，正三角形ができるので重複することに注意する

直角二等辺三角形については

L_1 を含むとき，もう 1 つの頂点は A_3 または A_7 の 2 個ある。

他についても同様で，重複するものはないから，

直角二等辺三角形は全部で $2\times4=8$ 個ある。

以上から求める個数は

$56-(24+24-8)=$ **16 個**

(3) (*)を満たす四角形は，辺または対角線に L_i $(i=1, 2, 3, 4)$ を含まなければならない。

L_i，L_j の 2 つを含む四角形は ${}_4C_2=6$ 個ある。

L_1 を含む四角形の他の 2 つの頂点は，A_2，A_3，A_4，A_6，A_7，A_8 の 6 個から 2 個選んだものなので，${}_6C_2=15$ 個ある。

以上から求める個数は

$15\times4-6=$ **54 個**

$\boxed{3}$ 平面において，2 つの点 O，A の間の距離が 1 であるとし，点 O と点 A を中心とする 2 つの円をそれぞれ C_1，C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 点 P，Q において交わり，$\angle\mathrm{OPA} = \frac{\pi}{3}$ であるとし，C_2 の半径 r は $r < 1$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) C_1 の半径を求めよ。

(2) $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$\angle\mathrm{PAO}$ の大きさを求めよ。

(3) $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，円 C_1 の内部と円 C_2 の内部との共通部分の面積を求めよ。

(1) 求める半径は OP であり，余弦定理から

$$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{AP}^2 - 2\cdot\mathrm{OP}\cdot\mathrm{AP}\cos\angle\mathrm{OPA}$$

$$1 = \mathrm{OP}^2 + r^2 - \mathrm{OP}\cdot r$$

OP の 2 次方程式として

$$\mathrm{OP}^2 - r\,\mathrm{OP} + r^2 - 1 = 0$$

$0 < r < 1$ のときこの方程式は実数解をもち，解の公式から

$$\mathrm{OP} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4(r^2 - 1)}}{2} = \frac{r \pm \sqrt{4 - 3r^2}}{2}$$

ここで $r > 0$，$\sqrt{4-3r^2} > 0$ からそれぞれ平方し，

$$r^2 - \left(\sqrt{4-3r^2}\right)^2 = 4r^2 - 4 = 4(r^2 - 1) < 0\ (\because\ 0 < r < 1)$$

$r < \sqrt{4-3r^2}$ となり，

OP > 0 から求める半径は $\boldsymbol{\dfrac{r + \sqrt{4 - 3r^2}}{2}}$

(2) (1) の結果から $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

$$\mathrm{OP} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{4 - 3\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}}{2} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

正弦定理から

$$\frac{\mathrm{OP}}{\sin\angle\mathrm{PAO}} = \frac{\mathrm{OA}}{\sin\angle\mathrm{OPA}}$$

$$\mathrm{OP}\cdot\sin\angle\mathrm{OPA} = \mathrm{OA}\cdot\sin\angle\mathrm{PAO}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\cdot\sin\angle\mathrm{PAO}$$

$$\sin\angle\mathrm{PAO} = 1$$

$0 < \angle\mathrm{PAO} < \pi$ から $\angle\mathrm{PAO} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

◀ この場合特別に，$\mathrm{OP}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{AP}^2$ に気づけば正弦定理に頼らなくても $\angle\mathrm{PAO} = \frac{\pi}{2}$

(3) (2) から $\angle\mathrm{PAQ} = \pi$ となる。考える面積の直線 PQ について O と同じ側の面積を S_1，A と同じ側の面積を S_2 とする。

S_1 は半径 AP，中心角 π のおうぎ形(半円)の面積なので

$$S_1 = \pi \mathrm{AP}^2 \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$\angle \mathrm{POQ} = \dfrac{\pi}{3}$ であり，S_2 は，おうぎ形 POQ から三角形 POQ を除いたものなので

$$S_2 = \pi \mathrm{OP}^2 \times \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{2}{9}\pi - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

したがって求める面積は $S_1 + S_2 = \boldsymbol{\dfrac{7}{18}\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

4 以下の問いに答えよ。

(1) 3 次関数 $y = x^3 + x^2$ のグラフと 2 次関数 $y = x^2 + 4x + 16$ のグラフの共通接線(どちらのグラフにも接する直線)は 2 本ある。それらの方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた 2 本の共通接線と 2 次関数 $y = x^2 + 4x + 16$ のグラフで囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) 曲線 $y = x^3 + x^2 \cdots$ ① について，$y' = 3x^2 + 2x$ から，① 上の点 $(\,t\,,\,t^3 + t^2\,)$ における接線の方程式は

$$y = (3t^2 + 2t)(x - t) + t^3 + t^2$$

すなわち $y = (3t^2 + 2t)x - 2t^3 - t^2 \cdots$ ② が

放物線 $y = x^2 + 4x + 16 \cdots$ ③ が接するのは，2 次方程式

$$x^2 + 4x + 16 = (3t^2 + 2t)x - 2t^3 - t^2 \cdots ④$$

が重解をもつときなので

$$x^2 - (3t^2 + 2t - 4)x + 2t^3 + t^2 + 16 = 0 \quad \text{として}$$

(判別式) $= 0$ より

$$(3t^2 + 2t - 4)^2 - 4\,(2t^3 + t^2 + 16) = 0 \quad \text{を解く}$$

$$9t^4 + 4t^2 + 16 + 12t^3 - 16t - 24t^2 - 4\,(2t^3 + t^2 + 16) = 0$$

$$9t^4 + 4t^3 - 24t^2 - 16t - 48 = 0$$

$$(t + 2)(t - 2)(9t^2 + 4t + 12) = 0$$

◀

-2	9	4	-24	-16	-48
		-18	28	-8	48
2	9	-14	4	-24	0
		18	8	24	
	9	4	12	0	

実数解は $t = -2,\ 2$ のみ。② に代入し，求める方程式は

$$\boldsymbol{y = 8x + 12} \cdots ⑤,\ \boldsymbol{y = 16x - 20} \cdots ⑥$$

(2) 2 直線 ⑤ と ⑥ の交点の x 座標は

$$8x + 12 = 16x - 20 \quad \text{を解いて } x = 4$$

③ と ⑤ の接点の x 座標は

$$x^2 + 4x + 16 = 8x + 12 \quad \text{を解く}$$

$(x - 2)^2 = 0$ から $x = 2$

③ と ⑥ の接点の x 座標は

$$x^2 + 4x + 16 = 16x - 20 \quad \text{を解く}$$

$(x - 6)^2 = 0$ から $x = 6$

したがって，求める面積を S とすると

$$S = \int_2^4 \{(x^2 + 4x + 16) - (8x + 12)\}\,dx$$
$$+ \int_4^6 \{(x^2 + 4x + 16) - (16x - 20)\}\,dx$$

◀ 接している放物線と直線にはさまれている部分の面積なので，被積分関数は完全平方式となる

$$
\begin{aligned}
&= \int_2^4 (x-2)^2\,dx + \int_4^6 (x-6)^2\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_2^4 + \left[\frac{1}{3}(x-6)^3\right]_4^6 \\
&= \frac{1}{3}\left\{2^3 - 0^3 + 0^3 - (-2)^3\right\} \\
&= \mathbf{\frac{16}{3}}
\end{aligned}
$$

◀ 数学 Ⅲ では当然の公式

$$
\int (x-\alpha)^2\,dx = \frac{1}{3}(x-\alpha)^3 + C
$$