$\boxed{1}$ 正四面体 OABC において三角形 ABC の重心を D，線分 AB を 2:1 に内分する点を E，線分 AC を 5:2 に外分する点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 点 G は点 E を通り $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に平行な直線上にある。点 H は点 F を通り $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に平行な直線上にある。3 点 D，G，H が一直線上にあるとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(4) (3) で求めた $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に対して，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2}{|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2}$ を求めよ。

(1)
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}}$$

◀ 重心の位置ベクトルは，3 つの頂点の位置ベクトルの**相加平均**

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+1}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}}$$

◀ **分点**の位置ベクトルの公式

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{5+(-2)}=\boldsymbol{-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{c}}$$

(3) 実数 s，t を用いて
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{1}{3}+s\right)\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\cdots①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}+t\vec{b}=-\frac{2}{3}\vec{a}+t\vec{b}+\frac{5}{3}\vec{c}\cdots②$$
とできる。さらに
$$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}\cdots③$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\vec{a}+\left(t-\frac{1}{3}\right)\vec{b}+\frac{4}{3}\vec{c}\cdots④$$
となる。3 点 D，G，H が一直線上にあるとき，
実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{DH}}=k\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ となるので
$$-\vec{a}+\left(t-\frac{1}{3}\right)\vec{b}+\frac{4}{3}\vec{c}=ks\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}-\frac{1}{3}k\vec{c}\cdots⑤$$

◀ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が 1 次独立でないと，必ずしも ⑦，⑧，⑨ を結論できない。

⑤ において，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので
$$\begin{cases}-1=ks\cdots⑦\\ t-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}k\cdots⑧\\ \dfrac{4}{3}=-\dfrac{1}{3}k\cdots⑨\end{cases}$$
を解く

⑨ から $k=-4$ となる。⑦ から $s=\dfrac{1}{4}$，⑧ から $t=-1$

①，② に代入し

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \boldsymbol{\frac{7}{12}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{-\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b} + \frac{5}{3}\vec{c}}$$

(4) 正四面体の 1 辺の長さを x とする。$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = x^2$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \frac{1}{2}x^2$ を用いると，(3) の結果から

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2 &= \left(\frac{1}{12}\right)^2|7\vec{a} + 8\vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{144}\left(49x^2 + 2\cdot7\cdot8\cdot\frac{1}{2}x^2 + 64x^2\right) \\ &= \frac{169}{144}x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2|-2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}|^2 \\ &= \frac{1}{9}\left\{(4+9+25)\,x^2 + 2\,(6-15-10)\cdot\frac{1}{2}x^2\right\} \\ &= \frac{19}{9}x^2 \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2}{|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2} = \frac{\frac{19}{9}x^2}{\frac{169}{144}x^2} = \boldsymbol{\frac{304}{169}}$$

2 座標平面上の 2 点 A$(0,-1)$，B$(1,2)$ を通る直線を ℓ とする。また，中心 $(3,-2)$，半径 3 の円を C とする。次の問いに答えよ。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) ℓ と C は共有点を持たないことを示せ。

(3) 点 P が円 C 上を動くとき，三角形 ABP の重心の軌跡を T とする。T はどのような図形になるか答えよ。

(4) (3) で求めた図形 T 上の点 (x, y) に対して，$\sqrt{x^2+y^2}$ の最大値と最小値を求めよ。

(1) （直線 AB の傾き）$= \dfrac{2-(-1)}{1-0} = 3$ から ℓ の方程式は

$$\boldsymbol{y = 3x - 1}$$

(2) ℓ の方程式を $3x-y-1=0$ として，

円 C の中心から ℓ までの距離 d は公式を用いて

$$d = \frac{|3\cdot3-(-2)-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \sqrt{10}$$

$d > 3 =$（円 C の半径）となるので，ℓ と C が示された。

(3) P(a, b)，△ABP の重心を G(x, y) として考える。

◀ 軌跡を求める点の座標を (x, y) と置き，x と y の関係式(この場合は等式(方程式))を作る。

円 C の方程式は $(x-3)^2+(y+2)^2=9$ であり，P は C 上にあるので

$$(a-3)^2+(b+2)^2 = 9 \cdots ①$$

G は △ABP の重心なので

$$\begin{cases} x = \dfrac{0+1+a}{3} \cdots ② \\ y = \dfrac{-1+2+b}{3} \cdots ③ \end{cases}$$

したがって

$$\begin{cases} a = 3x-1 \cdots\cdots ②' \\ b = 3y-1 \cdots\cdots ③' \end{cases}$$

②′，③′ を ① に代入し

$$(3x-4)^2+(3y+1)^2 = 9$$

両辺を 9 で割り

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

また，(2) より，P が C の円周上である限り，必ず三角形 ABP は存在するので，除く点は考えなくてよい。

したがって T は**点 $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ を中心とする，半径 1 の円**

(4)　原点を $\mathrm{O}(0,0)$，T を中心 $\mathrm{D}\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$，半径 $r=1$ の円とする。$\mathrm{OD}=\dfrac{1}{3}\sqrt{4^2+(-1)^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$ である。

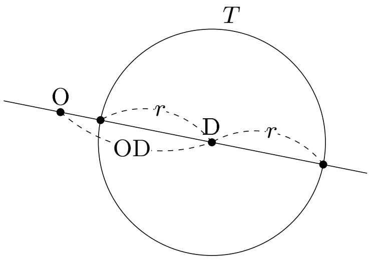
ここで，$\sqrt{x^2+y^2}$ は，原点 O と円 T 上の点との距離なので，円 T と直線 OD との 2 つの交点を考える。

$\sqrt{x^2+y^2}$ が最小となるのは，2 つの交点のうち線分 OD 上にある方で，最大となるのはもう 1 つの交点である。

したがって，**最大値は** $\mathbf{OD}+r=\dfrac{\sqrt{17}+3}{3}$，

最小値は $\mathbf{OD}-r=\dfrac{\sqrt{17}-3}{3}$

◀



3 平面上に正五角形 ABCDE があり，頂点 A，B，C，D，E は時計回りに配置されている。点 P をまず頂点 A の位置に置き，この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 n だけ動かす。たとえば，$n=2$ ならば点 P は頂点 C の位置にあり，$n=6$ ならば点 P は頂点 B の位置にある。次の問いに答えよ。

(1) さいころを 2 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率および点 P が頂点 B の位置にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) さいころを k 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率を求めよ。

(3) さいころを k 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 B の位置にある確率を b_k とする。b_{k+1} を b_k を用いて表せ。

(4) (3) で与えた b_k に対して，$f_k=6^k b_k$ とおく。数列 $\{f_k\}$ と $\{b_k\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

(1) P の位置の表を作成して求める。

◀ 表は積(数値)を記入してもよい。(数値の方が本質がわかる!?)

	1	2	3	4	5	6
1	B	C	D	E	A	B
2	C	E	B	D	A	C
3	D	B	E	C	A	D
4	E	D	C	B	A	E
5	A	A	A	A	A	A
6	B	C	D	E	A	B

A の位置にある確率 $\boldsymbol{\dfrac{11}{36}}$

B の位置にある確率 $\boldsymbol{\dfrac{7}{36}}$

(2) k 回投げて出た目の積 n が 5 の倍数となるときなので，求める確率は，「少なくとも 1 回 5 の目が出る」確率から $\boldsymbol{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^k}$

◀ n が 5 の倍数となることを((1)の作業等で)読みとる

(3) b_k と同様に，k 回目のさいころを投げ終わり，点 P が移動した後に頂点 A，C，D，E にある確率をそれぞれ a_k，c_k，d_k，e_k とする。k 回投げ終わったとき P の位置で場合分けして考える。

- A の場合，$k+1$ 回目に何が出ても頂点 B にあることはない。
- B の場合，$k+1$ 回目に 1 または 6 の目が出る。
- C の場合，$k+1$ 回目に 3 の目が出る。
- D の場合，$k+1$ 回目に 2 の目が出る。
- E の場合，$k+1$ 回目に 4 の目が出る。

したがって

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= 0\cdot a_k+\frac{2}{6}b_k+\frac{1}{6}c_k+\frac{1}{6}d_k+\frac{1}{6}e_k \\ &= \frac{1}{6}\left(a_k+b_k+c_k+d_k+e_k\right)-\frac{1}{6}a_k+\frac{1}{6}b_k \\ &= \frac{1}{6}\cdot 1-\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^k\right\}+\frac{1}{6}b_k \end{aligned}$$

$$b_{k+1}=\frac{1}{6}b_k+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^k,\ b_1=\frac{1}{3}$$

(4)　(3) で得られた漸化式の両辺に 6^{k+1} をかけて

$$6^{k+1}b_{k+1}=6^{k+1}\cdot\frac{1}{6}b_k+6^{k+1}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^k$$

すなわち

$$f_{k+1}=f_k+5^k\ \cdots ①$$

◀ 階差数列型の漸化式に持ち込んだ

ただし $f_1=6^1\cdot b_1=2$

$k\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} f_k &= f_1+\sum_{m=1}^{k-1}(f_{m+1}-f_m) \\ &= 2+\sum_{m=1}^{k-1}5^m \quad (\because ①) \\ &= 2+\frac{5\left(5^{k-1}-1\right)}{5-1} \\ &= \frac{5^k+3}{4} \end{aligned}$$

これは $f_1=2$ を満たす

したがって $f_k=\dfrac{5^k+3}{4}$

また $b_k=\dfrac{1}{6^k}f_k=\dfrac{1}{4}\left\{\left(\dfrac{5}{6}\right)^k+3\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^k\right\}$

$\boxed{4}$ 実数 a と b に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = ax^2 + bx + \cos x + 2\cos\frac{x}{2}$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$ の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\sin x\,dx$ の値を求めよ。

(3) $f(x)$ が

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = 4+\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx = \frac{4}{3}(4+\pi)$$

を満たすとき，a と b の値を求めよ。

(4) (3) で求めた a と b で定める $f(x)$ に対して，$f(x)$ の最小値とそのときの x を求めよ。

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx &= \int_0^{2\pi} x(\sin x)'\,dx \\ &= \Big[x\sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}(x)'\sin x\,dx \\ &= 0 - \Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

◀ 部分積分の基本型

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx &= \int_0^{2\pi} x(-\cos x)'\,dx \\ &= \Big[-x\cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}(x)'(-\cos x)\,dx \\ &= -2\pi + \Big[\sin x\Big]_0^{2\pi} \\ &= \boldsymbol{-2\pi}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx &= \int_0^{2\pi} x^2(\sin x)'\,dx \\ &= \Big[x^2\sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}(x^2)'\sin x\,dx \\ &= 0 - 2\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx \\ &= \boldsymbol{4\pi} \qquad (\because\ (1))\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} x^2\sin x\,dx = \int_0^{2\pi} x^2(-\cos x)'\,dx$$

$$= \Big[-x^2 \cos x \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (x^2)' (-\cos x)\, dx$$
$$= -4\pi^2 + 2\int_0^{2\pi} x \cos x\, dx$$
$$= \boldsymbol{-4\pi^2} \qquad (\because\ (1))$$

(3)
$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x\, dx$$
$$= a\int_0^{2\pi} x^2 \cos x\, dx + b\int_0^{2\pi} x \cos x\, dx + \int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx$$
$$+ \int_0^{2\pi} 2\cos x \cos \frac{x}{2}\, dx$$
$$= 4\pi a + b\cdot 0 + \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx + \int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{3}{2}x + \cos \frac{x}{2}\right) dx$$
$$= 4\pi a + \frac{1}{2}\Big[x + \frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{2\pi} + \Big[\frac{2}{3}\sin \frac{3}{2}x + 2\sin \frac{x}{2}\Big]_0^{2\pi}$$
$$= 4\pi a + \pi \cdots ①$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin x\, dx$$
$$= a\int_0^{2\pi} x^2 \sin x\, dx + b\int_0^{2\pi} x \sin x\, dx + \int_0^{2\pi} \sin x \cos x\, dx$$
$$+ \int_0^{2\pi} 2\sin x \cos \frac{x}{2}\, dx$$
$$= -4\pi^2 a - 2\pi b + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin 2x\, dx + \int_0^{2\pi} \left(\sin \frac{3}{2}x + \sin \frac{x}{2}\right) dx$$
$$= -4\pi^2 a - 2\pi b - \Big[\frac{1}{4}\cos 2x\Big]_0^{2\pi} - \Big[\frac{2}{3}\cos \frac{3}{2}x + 2\cos \frac{x}{2}\Big]_0^{2\pi}$$
$$= -4\pi^2 a - 2\pi b + \frac{16}{3} \cdots ②$$

①，② から

$4\pi a + \pi = 4 + \pi$ かつ $-4\pi^2 a - 2\pi b + \dfrac{16}{3} = \dfrac{4}{3}(4+\pi)$ を解いて，

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{\pi},\ \ b = -\frac{8}{3}}$$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{\pi}x^2 - \dfrac{8}{3}x + \cos x + 2\cos \dfrac{x}{2}$ について

◀ 定義域が実数全体では，極(小)値は無限個あるので大変

$$f(x) = \frac{1}{\pi}x^2 - \frac{8}{3}x + 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 + 2\cos \frac{x}{2}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(x^2 - \frac{8}{3}\pi x\right) + 2\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right) - 1$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(x - \frac{4}{3}\pi\right)^2 + 2\left(\cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{16}{9}\pi - \frac{3}{2}$$

とでき，$x = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき，$x - \dfrac{4}{3}\pi = 0$ かつ $\cos \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$ が同時に成り立つ。

したがって，

$f(x)$ は **$x = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき，最小値 $-\dfrac{16}{9}\pi - \dfrac{3}{2}$** をとる。

5 複素数平面上の原点を中心とする単位円周上の 4 点 z_1，z_2，z_3，z_4 は

$$\arg\frac{z_2}{z_1}=\theta_1>0,\ \arg\frac{z_3}{z_2}=\theta_2>0,\ \arg\frac{z_4}{z_3}=\theta_3>0,$$

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3<2\pi$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $|z_2-z_1|$ を θ_1 を用いて表せ。

(2) $|z_3-z_1|$，$|z_4-z_1|$ を θ_1，θ_2，θ_3 を用いて表せ。

(3) $\dfrac{|z_4-z_1||z_2-z_1|+|z_3-z_2||z_4-z_3|}{|z_2-z_1||z_3-z_2|+|z_4-z_3||z_4-z_1|}=\dfrac{|z_3-z_1|}{|z_4-z_2|}$ を示せ。

(1) $\arg z_1=\alpha$ とすると，$\arg z_2=\alpha+\theta_1$ とできる。このとき

$z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$z_2=\cos(\alpha+\theta_1)+i\sin(\alpha+\theta_1)$ から

$$\begin{aligned}z_2-z_1&=\cos(\alpha+\theta_1)-\cos\alpha+i(\sin(\alpha+\theta_1)-\sin\alpha)\\&=-2\sin\frac{2\alpha+\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_1}{2}+2i\cos\frac{2\alpha+\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_1}{2}\end{aligned}$$ より

◀（差（和））→（積）の公式

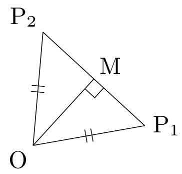
$$\begin{aligned}|z_2-z_1|^2&=4\sin^2\frac{\theta_1}{2}\left(\sin^2\frac{2\alpha+\theta_1}{2}+\cos^2\frac{2\alpha+\theta_2}{2}\right)\\&=4\sin^2\frac{\theta_1}{2}\end{aligned}$$

そして $\dfrac{\theta_1}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}+\dfrac{\theta_3}{2}<\pi$ から $0<\dfrac{\theta_1}{2}<\pi$ となり

$\sin\dfrac{\theta_1}{2}>0$ から $\boldsymbol{|z_2-z_1|=2\sin\dfrac{\theta_1}{2}}$

【別解】原点を O，z_1 が表す点を P_1，z_2 が表す点を P_2，線分 P_1P_2 の中点を M とする。

◀ 図形で考える場合には θ_1 の範囲で場合分けしなければ，正確な解答とはならない



- $0<\theta_1<\pi$ のとき $\angle P_1OP_2=\theta_1$ であり，

$$\begin{aligned}|z_2-z_1|&=P_1P_2\\&=2P_1M\\&=2OP_1\sin\frac{1}{2}\angle P_1OP_2\\&=2\sin\frac{\theta_1}{2}\quad(\because\ OP_1=1)\end{aligned}$$

- $\theta_1=\pi$ のとき $\angle P_1OP_2=\pi$ であり

$$|z_2-z_1|=P_1P_2=OP_1+OP_2=2$$

- $\pi<\theta_1<2\pi$ のとき $\angle P_1OP_2=2\pi-\theta_1$ であり，

$$\begin{aligned}|z_2-z_1|&=2P_1M\\&=2OP_1\sin\frac{1}{2}\angle P_1OP_2\\&=2\sin\frac{2\pi-\theta_1}{2}\\&=2\sin\left(\pi-\frac{\theta_1}{2}\right)\end{aligned}$$

$$= 2\sin\frac{\theta_1}{2}$$

いずれの場合も $|\,z_2 - z_1\,| = 2\sin\dfrac{\theta_1}{2}$ が成り立つ。

(2)　$\arg\dfrac{z_3}{z_1} = \theta_1 + \theta_2$，$\arg\dfrac{z_4}{z_1} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ である。

(1) の θ_1 を $\theta_1 + \theta_2$ または $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ とし，同様な計算から

$$\boldsymbol{|\,z_3 - z_1\,| = 2\sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}},$$

$$\boldsymbol{|\,z_4 - z_1\,| = 2\sin\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{2}}$$

(3)　(1)，(2) の結果を用いて

$$（右辺） = \frac{2\sin\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}}{2\sin\dfrac{\theta_2+\theta_3}{2}} = \frac{\sin\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\sin\dfrac{\theta_2+\theta_3}{2}}$$

左辺は

$$\begin{aligned}
（分子） &= 2\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\cdot 2\sin\frac{\theta_1}{2} + 2\sin\frac{\theta_2}{2}\cdot 2\sin\frac{\theta_3}{2}\\
&= -2\left(\cos\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2} - \cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right)\\
&\qquad - 2\left(\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2} - \cos\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\right)\\
&= -2\left(\cos\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2} - \cos\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\right)\\
&= 4\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
（分母） &= 2\sin\frac{\theta_1}{2}\cdot 2\sin\frac{\theta_2}{2} + 2\sin\frac{\theta_3}{2}\cdot 2\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\\
&= -2\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\\
&\qquad - 2\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2+2\theta_3}{2} - \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\\
&= -2\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2+2\theta_3}{2} - \cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\\
&= 4\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_2+\theta_3}{2}
\end{aligned}$$

$$（左辺） = \frac{4\sin\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\dfrac{\theta_1+\theta_3}{2}}{4\sin\dfrac{\theta_1+\theta_3}{2}\sin\dfrac{\theta_2+\theta_2}{2}} = \frac{\sin\dfrac{\theta_1+\theta_3}{2}}{\sin\dfrac{\theta_2+\theta_3}{2}}$$

より（左辺）＝（右辺）が成り立つ。

【別解】z_1，z_2，z_3，z_4 が表す点をそれぞれ A，B，C，D とする。
$\theta_1 > 0$，$\theta_2 > 0$，$\theta_3 > 0$，$0 < \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < 2\pi$ から A，B，C，D はこの順で円周上にある。四角形 ABCD は半径 1 の円に内接するので，

正弦定理から $\sin A = \sin C = \dfrac{\mathrm{BD}}{2}$，$\sin B = \sin D = \dfrac{\mathrm{AC}}{2}$

四角形 ABCD の面積を考えて

$$\triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{CBD} = \triangle\mathrm{BCA} + \triangle\mathrm{DCA}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin A + \frac{1}{2}\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CD}\sin C$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BA}\sin B + \frac{1}{2}\mathrm{DC}\cdot\mathrm{DA}\sin D$$

$$\mathrm{BD}\,(\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD} + \mathrm{CB}\cdot\mathrm{CD}) = \mathrm{AC}\,(\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BA} + \mathrm{DC}\cdot\mathrm{DA})$$

$$\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD} + \mathrm{CB}\cdot\mathrm{CD}}{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BA} + \mathrm{DC}\cdot\mathrm{DA}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BD}}$$

これを z_1，z_2，z_3，z_4 を用いて表せば，証明すべき等式になる。

6 $a \geqq 0$ とし，n を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ のとき，

$$\frac{x}{1+a}\left(1-\frac{x}{2(1+a)}\right) < \log\frac{1+a+x}{1+a} < \frac{x}{1+a}$$

を示せ。

(2) $I_n(a) = \left(1+\frac{1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\frac{2}{n^2(1+a)}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2(1+a)}\right)$ とおく。$\lim\limits_{n\to\infty}\log I_n(a)$ を求めよ。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ を求めよ。

(1) $f(x) = \frac{x}{1+a} - \log\frac{1+a+x}{1+a}$ $(x \geqq 0)$ とする。

◀ 平均値の定理を用いると，左側の不等式を証明することが難しい

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+a} - (\log(1+a+x) - \log(1+a))' \\
&= \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+a+x} \\
&= \frac{(1+a+x)-(1+a)}{(1+a)(1+a+x)} \\
&= \frac{x}{(1+a)(1+a+x)} \geqq 0
\end{aligned}$$

また $f(x) = 0$ から $x > 0$ では $f(x) > 0$ すなわち

$\log\frac{1+a+x}{1+a} < \frac{x}{1+a}$ $\cdots$① が成り立つ。

次に $g(x) = \log\frac{1+a+x}{1+a} - \frac{x}{1+a}\left(1-\frac{x}{2(1+a)}\right)$ $(x \geqq 0)$ とする。

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{1+a+x} + \frac{1}{2(1+a)^2}(x^2-2(1+a)x)' \\
&= \frac{2(1+a)^2+(1+a+x)(2x-2(1+a))}{2(1+a)^2(1+a+x)} \\
&= \frac{2x^2}{2(1+a)^2(1+a+x)} \geqq 0
\end{aligned}$$

また $g(x) =$ から $x > 0$ では $g(x) > 0$ すなわち

$\frac{x}{1+a}\left(1-\frac{x}{2(1+a)}\right) < \log\frac{1+a+x}{1+a}$ $\cdots$② が成り立つ。

①，② から $x > 0$ のとき，与えられた不等式が成り立つことが証明された。

(2) (1) で証明した不等式を ⊛ とする。ここで，

$$\begin{aligned}
I_n(a) &= \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2(1+a)}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\frac{n^2(1+a)+k}{n^2(1+a)}
\end{aligned}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{1+a+\dfrac{k}{n^2}}{1+a}$$

$$\log I_n(a) = \log \prod_{k=1}^{n} \frac{1+a+\dfrac{k}{n^2}}{1+a}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \log \frac{1+a+\dfrac{k}{n^2}}{1+a}$$

⊛ において $x = \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{2}{n^2}, \cdots, \dfrac{n}{n^2}$ とし，辺々加え

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(1+a)\cdot\dfrac{k}{n^2} - \left(\dfrac{k}{n^2}\right)^2}{2(1+a)^2}, \quad R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\dfrac{k}{n^2}}{1+a}$$

とすると

$$L_n < \sum_{k=1}^{n} \log \frac{1+a+\dfrac{k}{n^2}}{1+a} < R_n \quad \text{すなわち}$$

$$L_n < \log I_n(a) < R_n \cdots ③ \quad \text{となる。}$$

$$R_n = \frac{1}{n^2(1+a)} \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{1}{n^2(1+a)} \cdot \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$= \frac{1}{1+a} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{から}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{2(1+a)} \cdots ④$$

$$L_n = \frac{1}{n^2(1+a)} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2n^4(1+a)^2} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \frac{1}{1+a} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$- \frac{1}{2n(1+a)^2} \cdot \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{から}$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{2(1+a)} \cdots ⑤$$

③ および，④，⑤ の結果とはさみうちの原理から

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \log I_n(a) = \frac{1}{2(1+a)}}$$

(3)

$$\frac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n} = \frac{\dfrac{(3n^2+n)!}{(3n^2)!n!}}{\dfrac{(2n^2+n)!}{(2n^2)!n!}}$$

$$= \frac{(3n^2+n)(3n^2+n-1)\cdots(3n^2+1)}{(2n^2+n)(2n^2+n-1)\cdots(2n^2+1)}$$

◀ ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

$$= \frac{\left(3+\frac{n}{n^2}\right)\left(3+\frac{n-1}{n^2}\right)\cdots\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(2+\frac{n}{n^2}\right)\left(2+\frac{n-1}{n^2}\right)\cdots\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$J_n = \frac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ とすると

$$J_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{3n^2}}{1+\frac{k}{2n^2}} \quad \text{であり}$$

$$\log J_n = \log \prod_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{3n^2}}{1+\frac{k}{2n^2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{k}{3n^2}\right) - \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{k}{2n^2}\right)$$

$n \to \infty$ とするとき，右辺の各々の項について (2) から

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{k}{3n^2}\right) = I_n(2) = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{k}{2n^2}\right) = I_n(1) = \frac{1}{4}$$

収束するので

$$\lim_{n\to\infty} \log J_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$$

最後に，求める極限値は $\lim_{n\to\infty} J_n = \boldsymbol{e^{-\frac{1}{12}}}$

◀ 厳密には

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$

$\fallingdotseq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k$