1 四面体 OABC において三角形 ABC の重心を D，線分 AB を 2:1 に内分する点を E，線分 AC を 5:2 に外分する点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 点 G は点 E を通り $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に平行な直線上にある。点 H は点 F を通り $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に平行な直線上にある。3 点 D，G，H が一直線上にあるとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

◀ 重心の位置ベクトルは，3 つの頂点の位置ベクトルの**相加平均**

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+1}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{5+(-2)}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{c}$$

◀ **分点**の位置ベクトルの公式

(3) 実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{1}{3}+s\right)\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}+t\vec{b}=-\frac{2}{3}\vec{a}+t\vec{b}+\frac{5}{3}\vec{c}\cdots②$$

とできる。さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}\cdots③$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\vec{a}+\left(t-\frac{1}{3}\right)\vec{b}+\frac{4}{3}\vec{c}\cdots④$$

となる。3 点 D，G，H が一直線上にあるとき，
実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{DH}}=k\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ となるので

$$-\vec{a}+\left(t-\frac{1}{3}\right)\vec{b}+\frac{4}{3}\vec{c}=ks\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}-\frac{1}{3}k\vec{c}\cdots⑤$$

◀ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が 1 次独立でないと，必ずしも ⑦，⑧，⑨ を結論できない。

⑤ において，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので

$$\begin{cases}-1=ks\cdots⑦\\ t-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}k\cdots⑧\\ \frac{4}{3}=-\frac{1}{3}k\cdots⑨\end{cases}$$ を解く

⑨ から $k=-4$ となる。⑦ から $s=\frac{1}{4}$，⑧ から $t=-1$

①，② に代入し

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{7}{12}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}+\frac{5}{3}\vec{c}$$

2 平面上に正五角形 ABCDE があり，頂点 A，B，C，D，E は時計回りに配置されている。点 P をまず頂点 A の位置に置き，この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 n だけ動かす。たとえば，$n=2$ ならば点 P は頂点 C の位置にあり，$n=6$ ならば点 P は頂点 B の位置にある。次の問いに答えよ。

(1) さいころを 2 回投げて出た目の和で n を与えるとき，点 P が頂点 A，B，C，D，E の位置にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) さいころを 3 回投げて出た目の和で n を与えるとき，点 P が頂点 D の位置にある確率を求めよ。

(3) さいころを 5 回投げて出た目の和で n を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率を求めよ。

(1) P の位置の表を作成して求める。

	1	2	3	4	5	6
1	C	D	E	A	B	C
2	D	E	A	B	C	D
3	E	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E	A
5	B	C	D	E	A	B
6	C	D	E	A	B	C

A の位置にある確率 $\dfrac{7}{36}$

B の位置にある確率 $\dfrac{7}{36}$

C の位置にある確率 $\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$

D の位置にある確率 $\dfrac{7}{36}$

E の位置にある確率 $\dfrac{7}{36}$

(2) (1) の結果を用いて，2 回投げ終わったとき P の位置で場合分けして考える。

- A の場合，3 回目に 3 の目が出る。
- B の場合，3 回目に 2 の目が出る。
- C の場合，3 回目に 1 または 6 の目が出る。
- D の場合，3 回目に 5 の目が出る。
- E の場合，3 回目に 4 の目が出る。

求める確率は

$$\frac{7}{36}\cdot\frac{1}{6}+\frac{7}{36}\cdot\frac{1}{6}+\frac{8}{36}\cdot\frac{2}{6}+\frac{7}{36}\cdot\frac{1}{6}+\frac{7}{36}\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{54}$$

(3) 1 回目と 2 回目の目の和を 5 で割った余りを r_1，
3 回目と 4 回目の目の和を 5 で割った余りを r_2，
1 回目から 4 回目までの目の和を 5 で割った余りを R として考える。

◀ 5 で割った余りを考える。

下の表は R を r_1+r_2 として表したものである。
さいころを 4 回投げる全体の場合の数は 6^4 である。

◀ 場合の数を効率良く計算することを考える。((試験)時間は有限)

(1) の結果を用いると $r_1 = 2$ かつ $r_2 = 2$ となる場合の数は $8 \times 8 = 64$

それ以外で $r_1 = 2$ または $r_2 = 2$ となる場合の数は各々 $7 \times 8 = 56$

$r_1 \fallingdotseq 2$ かつ $r_2 \fallingdotseq 2$ となる場合の数は各々 $7 \times 7 = 49$

r_1 \ r_2	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

- $R = 0$ となる場合の数は $3 \times 49 + 2 \times 56 = 259$
- $R = 1$ となる場合の数は $3 \times 49 + 2 \times 56 = 259$
- $R = 2$ となる場合の数は $3 \times 49 + 2 \times 56 = 259$
- $R = 3$ となる場合の数は $3 \times 49 + 2 \times 56 = 259$
- $R = 4$ となる場合の数は $4 \times 49 + 1 \times 64 = 260$

5 回さいころを投げ点 P が 頂点 A の位置にあるのは 4 回目のさいころを投げ終えたときの点 P の位置で場合分けすると

点 P が 頂点 E の位置にある(すなわち $R = 4$)場合，5 回目のさいころは 1 または 6 の目が出る。それ以外の頂点にある場合は各々 1 通りのさいころの目の出方がある。

したがって求める確率は

$$\frac{1}{6^5} \cdot (4 \times 259 \times 1 + 1 \times 260 \times 2)$$
$$= \frac{1556}{6^5}$$
$$= \boldsymbol{\frac{389}{1944}}$$

3 座標平面上の 2 点 A$(0, -1)$，B$(1, 2)$ を通る直線を ℓ とする。また，中心 $(3, -2)$，半径 3 の円を C とする。次の問いに答えよ。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) ℓ と C は共有点を持たないことを示せ。

(3) 点 P が円 C 上を動くとき，三角形 ABP の重心の軌跡を T とする。T はどのような図形になるか答えよ。

(4) (3) で求めた図形 T 上の点 (x, y) に対して，$\sqrt{x^2+y^2}$ の最大値と最小値を求めよ。

(1) （直線 AB の傾き）$= \dfrac{2-(-1)}{1-0} = 3$ から ℓ の方程式は

$$y = 3x - 1$$

(2) ℓ の方程式を $3x - y - 1 = 0$ として，

円 C の中心から ℓ までの距離 d は公式を用いて

$$d = \frac{|3\cdot 3 - (-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}$$

$d > 3 =$（円 C の半径）となるので，ℓ と C が示された。

(3) P(a, b)，△ABP の重心を G(x, y) として考える。

◀ 軌跡を求める点の座標を (x, y) と置き，x と y の関係式(この場合は等式(方程式))を作る。

円 C の方程式は $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$ であり，P は C 上にあるので

$$(a-3)^2 + (b+2)^2 = 9 \cdots ①$$

G は △ABP の重心なので

$$\begin{cases} x = \dfrac{0+1+a}{3} \cdots ② \\ y = \dfrac{-1+2+b}{3} \cdots ③ \end{cases}$$

したがって

$$\begin{cases} a = 3x - 1 \cdots\cdots ②' \\ b = 3y - 1 \cdots\cdots ③' \end{cases}$$

②′，③′ を ① に代入し

$$(3x-4)^2 + (3y+1)^2 = 9$$

両辺を 9 で割り

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

また，(2) より，P が C の円周上である限り，必ず三角形 ABP は存在するので，除く点は考えなくてよい。

したがって T は**点 $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ を中心とする，半径 1 の円**

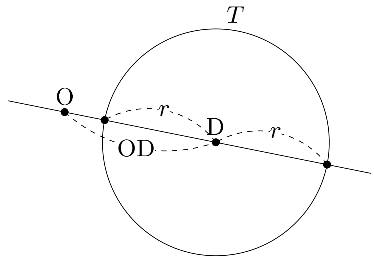
(4) 原点を $\mathrm{O}(0,0)$，T を中心 $\mathrm{D}\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$，半径 $r=1$ の円とする。$\mathrm{OD} = \dfrac{1}{3}\sqrt{4^2+(-1)^2} = \dfrac{\sqrt{17}}{3}$ である。

ここで，$\sqrt{x^2+y^2}$ は，原点 O と円 T 上の点との距離なので，円 T と直線 OD との 2 つの交点を考える。

$\sqrt{x^2+y^2}$ が最小となるのは，2 つの交点のうち線分 OD 上にある方で，最大となるのはもう 1 つの交点である。

したがって，**最大値は** $\mathbf{OD}+r=\dfrac{\sqrt{17}+3}{3}$，

最小値は $\mathbf{OD}-r=\dfrac{\sqrt{17}-3}{3}$



4 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x|x-1| - 3x + 3$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ。

(2) a の値が $-3 \leqq a \leqq -2$ の範囲で動くとき，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = ax + 3$ で囲まれた図形の面積 S を a を用いて表せ。

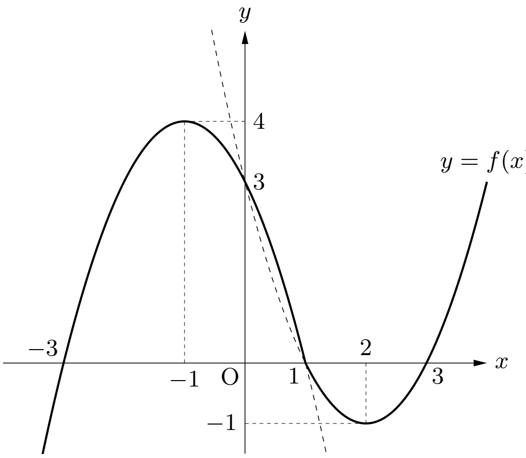
(3) (2) で与えられた S に対して，a の値が $-3 \leqq a \leqq -2$ の範囲で動くとき，S の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。

(1) $x \leqq 1$ のとき

$f(x) = x(-x+1) - 3x + 3 = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4$

$x \geqq 1$ のとき

$f(x) = x(x-1) - 3x + 3 = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$



(2) $x < 1$ のとき $f'(x) = -2x - 2$ であり，

点 $(0, 3)$ における $y = f(x)$ の接線の傾きは $f'(0) = -2$ である。

また，2 点 $(0, 3)$，$(1, 0)$ を通る直線の傾きは -3 である。

説明のため $f_1(x) = -x^2 - 2x + 3\ (x \leqq 1)$,

$f_2(x) = x^2 - 4x + 3\ (x \geqq 1)$，$g(x) = ax + 3$ とする。

$f_1(x) = g(x)$ を解く

$-x^2 - 2x + 3 = ax + 3$

$x^2 + (a+2)x = 0$

$x(x + (a+2)) = 0$

$x = 0, -a-2$ となり $\alpha = -a-2$ とする。

$-3 \leqq a \leqq -2$ のとき $0 \leqq \alpha \leqq 1$ となる。

$f_2(x) = g(x)$ を解く

$$x^2-4x+3=ax+3$$
$$x^2-(a+4)x=0$$
$$x(x-(a+4))=0$$

$x=0,\ a+4$ となり，$\beta=a+4$ とすると $1\leqq\beta\leqq 2$ から $x\geqq 1$ となるのは $x=\beta$ のみ。

- $0\leqq x\leqq\alpha$ では $f_1(x)\geqq g(x)$
- $\alpha\leqq x\leqq 1$ では $f_1(x)\leqq g(x)$
- $1\leqq x\leqq\beta$ では $f_2(x)\leqq g(x)$　から

$$S=\int_0^{\alpha}\{f_1(x)-g(x)\}\,dx+\int_{\alpha}^{1}\{g(x)-f_1(x)\}\,dx+\int_1^{\beta}\{g(x)-f_2(x)\}\,dx$$

A$(\alpha, f(\alpha))$，B$(\beta, f(\beta))$，C$(1, f(1))$ として

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\alpha}\{-x(x-\alpha)\}\,dx+\triangle\mathrm{ABC}\\&\quad-\int_{\alpha}^{1}\{-(x-\alpha)(x-1)\}\,dx+\int_1^{\beta}\{-(x-1)(x-\beta)\}\,dx\\&=\frac{1}{6}\cdot(\alpha-0)^3+\frac{1}{2}\times\{g(1)-f(1)\}\times(\beta-\alpha)\\&\quad-\frac{1}{6}\cdot(1-\alpha)^3+\frac{1}{6}\cdot(\beta-1)^3\\&=\frac{1}{6}\cdot(-a-2)^3+\frac{1}{2}\cdot(a+3)\cdot(2a+6)\\&\quad-\frac{1}{6}\cdot(a+3)^3+\frac{1}{6}\cdot(a+3)^3\\&=-\frac{1}{6}\cdot(a^3+6a^2+12a+8)+a^2+6a+9\end{aligned}$$

◀ 代入後の計算量をなるべく少なくするように工夫する

したがって $\boldsymbol{S=-\frac{1}{6}a^3+4a+\frac{23}{3}}$

(3)　(2) から $S(a)=-\frac{1}{6}a^3+4a+\frac{23}{3}$ として，
$-3\leqq a\leqq -2$ の範囲で最大値，最小値を求める。
$S'(a)=-\frac{1}{2}a^2+4=-\frac{1}{2}(a^2-8)$ から増減表は

a	-3	$\cdots$	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	$\frac{1}{6}$	↘	極小	↗	1

したがって

最大値 $a=-2$ のとき 1，
最小値 $a=-2\sqrt{2}$ のとき $\frac{23-16\sqrt{2}}{3}$