1 次の各問に答えよ。

問 1 xyz 空間の 3 点 A$(1,0,0)$，B$(0,-1,0)$，C$(0,0,2)$ を通る平面 α に関して点 P$(1,1,1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。ただし，点 Q が平面 α に関して P と対称であるとは，線分 PQ の中点 M が平面 α 上にあり，直線 PM が P から平面 α に下ろした垂線となることである。

問 2 赤玉，白玉，青玉，黄玉が 1 個ずつ入った袋がある。よくかきまぜた後に袋から 1 個取り出し，その玉の色を記録してから袋に戻す。この試行を繰り返すとき，n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて 4 種類全ての色が記録済みとなる確率を求めよ。ただし n は 4 以上の整数とする。

問 1 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,-1,0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,0,2)$ である。

M が平面 α 上の点であるとき，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ \cdots ①$$

と表すことができる。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(0,1,1)$ であり $\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}\perp\alpha$ となるのは

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PM}}\ \cdots ② \quad かつ \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PM}}\ \cdots ③$$

② から $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PM}}=0$

$$(-1,-1,0)\cdot(s(-1,-1,0)+t(-1,0,2)-(0,1,1))=0$$

$$2s+t+1=0\ \cdots ④$$

③ から $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PM}}=0$

$$(-1,0,2)\cdot(s(-1,-1,0)+t(-1,0,2)-(0,1,1))=0$$

$$s+5t-2=0\ \cdots ⑤$$

④，⑤ を解いて $(s,t)=\left(-\frac{7}{9},\frac{5}{9}\right)$

① から $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=-\frac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{PM}}\\&=(1,1,1)\\&\quad+2\left(-\frac{7}{9}(-1,-1,0)+\frac{5}{9}(-1,0,2)-(0,1,1)\right)\end{aligned}$$

したがって，点 Q の座標は $\left(\mathbf{\frac{13}{9}},\mathbf{\frac{5}{9}},\mathbf{\frac{11}{9}}\right)$

◀ 点 Q(x,y,z) として，
- PQ の中点 M が α 上にある
- PQ $\perp\alpha$ である

で，計 3 本の条件式を作り求める方法もある

問 2 まず $n-1$ 回終了時に，白，青，黄の 3 色が全て記録されている確率を P_{n-1} とし，これを求める。

$n-1$ 回目終了時まで，赤が記録されない場合の数は 3^{n-1}

その中で 1 色のみが記録されているのは $1\times3=3$ 通りある。

また白と青の 2 色のみが記録されるのは $2^{n-1}-2$ 通りある。

そして 2 色の選び方は ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通りあるので,

$$P_{n-1} = \frac{3^{n-1} - \left\{3 + 3\left(2^{n-1} - 2\right)\right\}}{4^{n-1}}$$

求める確率は $P_{n-1} \times \dfrac{1}{4} = \boldsymbol{\dfrac{3^{n-1} - 3\cdot 2^{n-1} + 3}{4^n}}$

2 曲線 $y = \frac{1}{2}(x^2+1)$ 上の点 P における接線は x 軸と交わるとし，その交点を Q とおく。線分 PQ の長さを L とするとき，L が取りうる値の最小値を求めよ。

$\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}(t^2+1)\right)$ とする。

$y' = x$ であり $x = t$ のとき $y' = t$ から P における接線の方程式は

$$y = t(x-t) + \frac{1}{2}(t^2+1) = tx + \frac{1}{2}(-t^2+1) \quad \cdots ①$$

① が x 軸と交わるので $t \fallingdotseq 0$

① で $y = 0$ とすると $t \fallingdotseq 0$ から $x = \frac{1}{2t}(t^2-1)$

したがって Q の座標は $\left(\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right),\ 0\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \left(-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\ -\frac{1}{2}(t^2+1)\right)$$

$$\begin{aligned} L^2 &= \frac{1}{4}\left\{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2 + (t^2+1)^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{t^2}(t^2+1)^2 + \frac{t^2}{t^2}(t^2+1)^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left\{\frac{1+t^2}{t^2}(t^2+1)^2\right\} \\ &= \frac{(t^2+1)^3}{4t^2} \end{aligned}$$

$t^2 = u$ とすると $t \fallingdotseq 0$ から $u > 0$ であり

$L^2 = \frac{(u+1)^3}{4u} = f(u)$ とすると

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{1}{4}\cdot\frac{\left((u+1)^3\right)'u - (u+1)^3(u)'}{u^2} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{3(u+1)^3\cdot u - (u+1)^3}{u^2} \\ &= \frac{(2u-1)(t+1)^2}{4u^2} \end{aligned}$$

$u > 0$ での増減表は次の通り

u	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(u)$	$-$	0	$+$
$f(u)$	$\searrow$	$\frac{27}{16}$	$\nearrow$

$L > 0$ から L^2 が最小になるとき L が最小になるので，

求める最小値は $\sqrt{\frac{27}{16}} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$

3 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{6}$ の和の値を求めよ。

この数列の一般項を $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ とする。

任意の n について

$$a_{n+6}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+6}\cos\frac{(n+6)\pi}{6}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^6\cos\left(\pi+\frac{n\pi}{6}\right)$$

すなわち $a_{n+6}=-\frac{1}{2^6}a_n\ \cdots①$

また，はさみうちの原理を用いると

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0\ \cdots②$$

次に

$$T_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}+a_{n+5}$$

とすると $\{T_n\}$ は ① から公比 $-\frac{1}{64}$ の等比数列をなし，初項は

$T_0=1+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{8}+0-\frac{1}{32}-\frac{\sqrt{3}}{64}=\frac{70+15\sqrt{3}}{64}$ となる。

部分和について $r=-\frac{1}{2^6}$ として

(ア) $\sum_{n=0}^{6N-1}a_n=(a_0+a_1+\cdots+a_5)+(a_6+\cdots+a_{11})+\cdots$

$$\begin{aligned}&\cdots+(a_{6(N-1)}+\cdots+a_{6N-1})\\&=T_0+T_1+\cdots+T_{N-1}\\&=T_0\cdot\frac{1-r^N}{1-r}\\&=\frac{70+15\sqrt{3}}{65}(1-r^N)\\&=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}(1-r^N)\end{aligned}$$

(イ) $\sum_{n=0}^{6N}a_n=\sum_{n=0}^{6N-1}a_n+a_{6N}$

(ウ) $\sum_{n=0}^{6N+1}a_n=\sum_{n=0}^{6N-1}a_n+a_{6N}+a_{6N+1}$

(エ) $\sum_{n=0}^{6N+2}a_n=\sum_{n=0}^{6N-1}a_n+a_{6N}+a_{6N+1}+a_{6N+2}$

(オ) $\sum_{n=0}^{6N+3}a_n=\sum_{n=0}^{6N-1}a_n+a_{6N}+a_{6N+1}+a_{6N+2}+a_{6N+3}$

(カ) $\sum_{n=0}^{6N+4}a_n=\sum_{n=0}^{6N-1}a_n+a_{6N}+a_{6N+1}+a_{6N+2}+a_{6N+3}+a_{6N+4}$

$N\to\infty$ とすると $r^N\to 0$ および ② から，

(ア)〜(カ)いずれの場合も（左辺）$\to\frac{14+3\sqrt{3}}{13}$

したがって $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}=\boldsymbol{\frac{14+3\sqrt{3}}{13}}$

◀ 一般に
$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$
$\fallingdotseq\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$
安易に項の順序を変えてはいけない

◀ 部分和の 6 通りの場合分けは大変だが，極限計算はほとんど無い

4 曲線 $y = \log(1+\cos x)$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ。

求める長さを L とすると $L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ である。

ここで $y' = \dfrac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}$ から

$$
\begin{aligned}
1+(y')^2 &= 1 + \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{(1+\cos x)^2 + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{2(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{2}{1+\cos x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+(y')^2} &= \left| \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} \right| \\
&= \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} \quad \left(\because\ 0 \leqq x \leqq \frac{x}{2} \text{ のとき } \cos \frac{x}{2} \geqq 0 \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \frac{x}{2}}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2}}{1-\sin^2 \frac{x}{2}}\,dx
\end{aligned}
$$

ここで $\sin \dfrac{x}{2} = t$ とすると $\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 \to \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(1-t)(1+t)} \cdot 2\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\
&= \Big[-\log|1-t| + \log|1+t| \Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= -\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (-\log 1 + \log 1) \\
&= \log \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}
\end{aligned}
$$

◀ 曲線の長さ L の公式

$L = \displaystyle\int dL$

$\Delta L \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x)\Delta x)^2}$

$\Delta \to 0$ として

$dL = \sqrt{1+(f(x))^2}\,dx$

$$= \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \log \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{2-1}$$

$$= \mathbf{2 \log \left(\sqrt{2}+1\right)}$$

$\boxed{5}$ xy 平面において，2 点 $\mathrm{B}\left(-\sqrt{3}, -1\right)$，$\mathrm{C}\left(\sqrt{3}, -1\right)$ に対し，点 A は次の条件(*)を満たすとする。

(*)　$\angle\mathrm{BAC} = \frac{\pi}{3}$ かつ点 A の y 座標は正。

次の各問に答えよ。

(1) △ABC の外心の座標を求めよ。

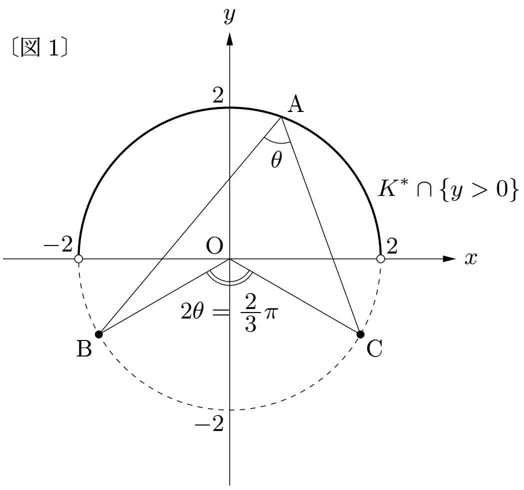
(2) 点 A が条件(*)を満たしながら動くとき，△ABC の垂心の軌跡を求めよ。

(1) 中心 $\mathrm{O}(0, 0)$，半径 $\mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 2$ の円を K，$y > 0$ を含む方の円弧 BC を K^* とする。

$\angle\mathrm{BOC} = \frac{2}{3}\pi$ であり y 座標が正となる点 A が

- K^* 上にあるとき，円周角の性質から $\angle\mathrm{BAC} = \frac{\pi}{3}$ となり，(*)を満たす。〔図 1〕　◀ これは十分条件

〔図 1〕



- 点 A が円 K の内部にあるとき，直線 BA の延長と K^* との交点を A' とする。このとき　◀ 必要条件の吟味

$$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{BA'C} + \angle\mathrm{A'CA} > \angle\mathrm{BA'C} = \frac{\pi}{3}$$

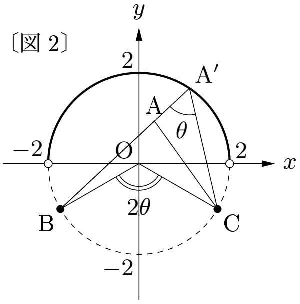
となり (*)を満たさない。〔図 2〕

- 点 A が円 K の外部にあるとき，線分 BA と K^* との交点を A' とする。このとき

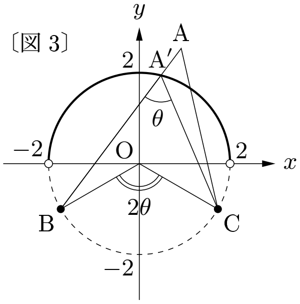
$$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{BA'C} - \angle\mathrm{ACA'} < \angle\mathrm{BA'C} = \frac{\pi}{3}$$

となり (*)を満たさない。〔図 3〕

〔図 2〕



〔図 3〕



以上から (✻)を満たす点 A は K^* 上の $y>0$ の点に限るので，
△ABC の外心の座標はは，円 K の中心の座標である $(\mathbf{0}\,,\,\mathbf{0})$

(2)　(1) から $\mathrm{A}\,(\,2\cos\theta\,,\,2\sin\theta\,)$ $(0<\theta<\pi)$ とできる。

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\left(2\cos\theta+\sqrt{3}\,,\,2\sin\theta+1\right)$,

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\left(2\cos\theta-\sqrt{3}\,,\,2\sin\theta+1\right)$ より

点 B を通り，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ を法線ベクトルとする直線

$$\left(2\cos\theta-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)+(2\sin\theta+1)(y+1)=0\cdots①$$

◀ 通過する点と法線ベクトルで，直線を決定できるようにする。
普段は方向ベクトル(傾き)で決定することが多い

点 C を通り，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ を法線ベクトルとする直線

$$\left(2\cos\theta+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)+(2\sin\theta+1)(y+1)=0\cdots②$$

①，② の交点が △ABC の垂心 H である。

① − ② から

$$-2\sqrt{3}\,x+4\sqrt{3}\cos\theta=0$$

したがって $x=2\cos\theta\cdots③$ を ① に代入し

◀ A から辺 BC への垂線は $x=2\sin\theta$ であり，H はこの直線上にあることがわかれば，方程式を立式するまでもない。③ は自明

$$\left(2\cos\theta-\sqrt{3}\right)\left(2\cos\theta+\sqrt{3}\right)+(2\sin\theta+1)(y+1)=0$$

$$4\cos^2\theta+3+(2\sin\theta+1)(y+1)=0$$

$$4\,(1-\sin^2\theta)+3+(2\sin\theta+1)(y+1)=0$$

$$1-4\sin^2\theta+(2\sin\theta+1)(y+1)=0$$

$$-\,(2\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)+(2\sin\theta+1)(y+1)=0$$

$$(2\sin\theta+1)((y+1)-(2\sin\theta-1))=0$$

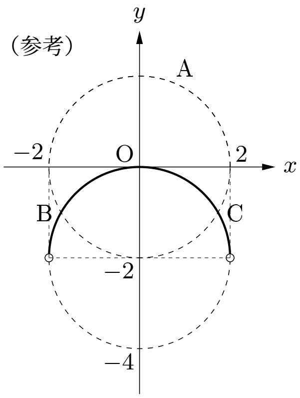
$0<\theta<\pi$ のとき $2\sin\theta+1\fallingdotseq 0$ から

$y+1=2\sin\theta-1$ すなわち $y=2\sin\theta-2\cdots④$

$0<\theta<\pi$ および ③，④ から H の軌跡は

$$\boldsymbol{x^2+(y+2)^2=4,\ \ -2<x<2,\ \ -2<y\leqq 0}$$

◀ (参考)



6 次の各問に答えよ。

問 1　n を 2 以上の整数とする。$3^n - 2^n$ が素数ならば n も素数であることを示せ。

問 2　a を 1 より大きい定数とする。微分可能な関数 $f(x)$ が $f(a) = af(1)$ を満たすとき，曲線 $y = f(x)$ の接線で原点 $(0, 0)$ を通るものが存在することを示せ。

問 1　対偶である「n が 2 以上の整数で素数でなければ $3^n - 2^n$ は素数でない」が真であることを示す。

◀ 対偶を用いて，仮定を使いやすいものにする

$n \geqq 2$ のとき，因数分解の公式

$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1}) \cdots ①$$

は既知のものとする。

ここで，n が素数でないと仮定すると $n = km$ ただし k，m はともに 2 以上の整数とできる。

$3^n - 2^n = 3^{km} - 2^{km} = \left(3^k\right)^m - \left(2^k\right)^m$ とすると

① において $n = m$，$A = 3^k$，$B = 2^k$ としたもになる。このとき

① の右辺の（第 1 項）$= A - B > 1$ $(\because\ k \geqq 2)$,

（第 2 項）$=$（正の整数の積のいくつかの和）> 1

したがって ① の右辺は素数になりえない。

対偶が真であることが示されたので，もとの命題も真である。

問 2　曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y = f'(t)(x-t) + f(t) \cdots ②$$

である。② が点 $(0, 0)$ を通るとき

$$0 = -tf'(t) + f(t) \cdots ③$$

となる実数 t が存在する。逆に ③ を満たす実数 t が存在するとき，② が $(0, 0)$ を通ることが示される。

◀ ここまでは，議論できるようにする

ここで，$g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ $(x > 0)$ とする。$g(x)$ は定義域内で微分可能である。

◀ 問題文から，平均値の定理が使えそうだと思えること。また，条件式は $\dfrac{f(a)}{a} = f(1) = \dfrac{f(1)}{1}$ から，$\dfrac{f(x)}{x}$ がよさそうだと思えること

$g(x)$ に区間 $1 \leqq x \leqq a$ に平均値の定理を用いると

$$\frac{g(a) - g(1)}{a-1} = g'(c) \cdots ④,\ 1 < c < a \cdots ⑤$$

④，⑤ を満たす実数 c が存在する。

$g'(x) = \dfrac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$ から，④ は

$$\frac{\dfrac{f(a)}{a} - \dfrac{f(1)}{1}}{a-1} = \frac{f'(c)\cdot c - f(c)}{c^2}$$

$$\frac{f(a) - af(1)}{a(a-1)} = \frac{f'(c)\cdot c - f(c)}{c^2}$$

仮定から（左辺）$= 0$ となり，
（右辺）$= 0$ となるのは $cf'(c) - f(c) = 0$

これは，方程式 ③ が $t = c$ となる解をもつことを表している。

したがって，曲線 $y = f(x)$ の接線で $(0, 0)$ を通るものがあることが示された。