1 次の各問に答えよ。

問 1 10 進法で表された数 6.75 を 2 進法で表せ。また，この数と 2 進法で表された数 101.0101 との積として与えられる数を 2 進法および 4 進法で表せ。

問 2 $\triangle$OAB において OA $=3$，OB $=2$，$\angle$AOB $=60^\circ$ とする。$\triangle$OAB の垂心を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

問 1 $6.75=1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0+1\times\dfrac{1}{2^1}+1\times\dfrac{1}{2^2}$

から求める表記は **110.11**

次に 2 進法で表された 101.0101 は 10 進法では $5+\dfrac{5}{16}$ から

$6.75=6+\dfrac{3}{4}$ として

$$\left(6+\frac{3}{4}\right)\left(5+\frac{5}{16}\right)=30+\frac{30}{16}+\frac{15}{4}+\frac{15}{64}=35+\frac{55}{64}$$

2 進法では，整数部について

$$35=1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$$

小数部(真分数部)について

$$\begin{aligned}\frac{55}{64}&=\frac{1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0}{2^6}\\&=1\times\frac{1}{2^1}+1\times\frac{1}{2^2}+0\times\frac{1}{2^3}\\&\quad+1\times\frac{1}{2^4}+1\times\frac{1}{2^5}+1\times\frac{1}{2^6}\end{aligned}$$

したがって 2 進法での表記は **100011.110111**

4 進法については，同様に

◀ (2 進法) $\longrightarrow$ (4 進法) については，情報の授業で 2 進法から 16 進法に変換したように，小数点から 2 桁ずつ区切り 10, 00, 11., 11, 01, 11 を 203.313 とできる

$$35=2\times4^2+0\times4^1+3\times4^0$$

$$\begin{aligned}\frac{55}{64}&=\frac{3\times4^2+1\times4^1+3\times4^0}{4^3}\\&=3\times\frac{1}{4^1}+1\times\frac{1}{4^2}+3\times\frac{1}{4^3}\end{aligned}$$

4 進法での表記は **203.313**

問 2 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3\cdot2\cos60^\circ=3$ を準備して，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \cdots①$$

とする。H が $\triangle$OAB の垂心であるとき

$$\mathrm{AH}\perp\mathrm{OB}\cdots②\quad かつ\quad \mathrm{BH}\perp\mathrm{OA}\cdots③$$

② から $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ すなわち $(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

$$(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

$$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

$3s+4t-3=0\cdots$④

同様に ④ から $(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

$(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

$9s+3t-3=0\cdots$⑤

④, ⑤ を解いて $(s,\ t)=\left(\dfrac{1}{9},\ \dfrac{2}{3}\right)$

① に代入して $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

【別解】

点 A から辺 OB, 点 B から辺 OA へ下ろした垂線の足をそれぞれ $\mathrm{H_A}$, $\mathrm{H_B}$ とする。このとき,

$$\mathrm{OH_B}=\mathrm{OB}\times\cos 60^\circ=1,\ \mathrm{OH_A}=\frac{3}{2}$$

線分 $\mathrm{AH_A}$ と $\mathrm{BH_B}$ との交点が垂心 H となる。$\triangle\mathrm{OH_BB}$ と直線 $\mathrm{AH_A}$ にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{OH_B}}{\mathrm{H_BA}}\times\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HH_A}}\times\frac{\mathrm{H_AB}}{\mathrm{BO}}=1$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HH_A}}\times\frac{1}{4}=1$$

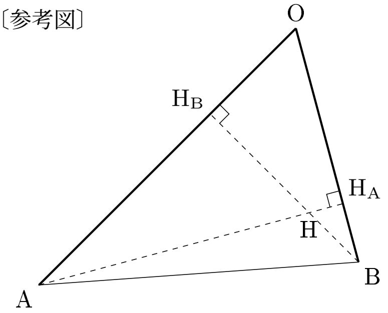
$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HH_A}}=\dfrac{8}{1}$ から $\mathrm{AH}:\mathrm{HH_A}=8:1$ となる。

H は線分 $\mathrm{AH_A}$ を $8:1$ に内分する点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+8\overrightarrow{\mathrm{OH_A}}}{8+1}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+8\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)}{9}$$

すなわち $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

〔参考図〕



2 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left|x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right|dx$ を求めよ。

$f(x)=x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ とする。

$$f(x)=\frac{1}{2}(2x^2-x-1)=\frac{1}{2}(2x+1)(x-1) \quad \text{から}$$

$-1 \leqq x \leqq -\dfrac{1}{2}$ では $|f(x)|=f(x)$,

$-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ では $|f(x)|=-f(x)$ なので

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\{-f(x)\}\,dx\\
&= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx+I-I+\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\{-f(x)\}\,dx\\
&\qquad \left(I=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx\right)\\
&= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx-\int_{-\frac{1}{2}}^{1} 2f(x)\,dx\\
&= 2\int_{0}^{1}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)dx-\int_{-\frac{1}{2}}^{1} 2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)\,dx\\
&= 2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x\right]_0^1+\frac{-2}{-6}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^3\\
&= 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3\\
&= -\frac{1}{3}+\frac{9}{8}\\
&= \mathbf{\frac{19}{24}}
\end{aligned}$$

◀ 偶関数，奇関数の公式を用いることができる工夫したが，単純に計算してよい

3 n を 2 以上の整数とする。1 から n までの番号が付いた n 個の箱があり，それぞれの箱には赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている。このとき操作(✻)を $k=1, \cdots, n-1$ に対して，k が小さい方から順に 1 回ずつ行う。

(✻)　番号 k の箱から玉を 1 個取り出し，番号 $k+1$ の箱に入れてよくかきまぜる。

一連の操作が全て終了した後，番号 n の箱から玉を 1 個取り出し，番号 1 の箱に入れる。このとき番号 1 の箱に赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている確率を求めよ。

(✻)の操作を振り返す中で，1 回目の操作(✻)で赤玉が取り出され，m 番目の箱が 3 個になったとき，この箱の中に赤玉が 2 個ある確率を $R_{r,m}$，白玉が 2 個ある確率を $W_{r,m}$ とする。

◀ 2,3 回ならば遷移図をかいて計算できるが，一般的な n 回なので，漸化式で考えられるようにする

$m \geqq 3$ のとき

$$R_{r,m} = \frac{2}{3}R_{r,m-1} + \frac{1}{3}W_{r,m-1} \cdots ①$$

このとき $R_{r,2} = \frac{1}{2}$，$W_{r,2} = 0$,

また $m \geqq 3$ について $R_{r,m} + W_{r,m} = \frac{1}{2} \cdots ②$

◀ 単に R_m，W_m とすると，$R_m + W_m = 1$ となり混乱する?

① は

$$R_{r,m} = \frac{2}{3}R_{r,m-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - R_{r,m-1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}R_{r,m-1} + \frac{1}{6}$$

$$R_{r,m} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(R_{r,m-1} - \frac{1}{4}\right)$$

数列 $\{R_{r,m}\}$ は 2 項目以降が公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列をなすので

$$R_{r,m} - \frac{1}{4} = \left(R_{r,2} - \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{m-2} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2}$$

$$R_{r,m} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2} \cdots ③$$

② から

$$W_{r,m} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2} \cdots ④$$

同様に 1 回目の操作(✻)で白玉が取り出され，m 番目の箱が 3 個になったとき，この箱の中に赤玉が 2 個ある確率を $R_{w,m}$，白玉が 2 個ある確率を $W_{w,m}$ とすると，対称性から

$$R_{w,m} = W_{r,m} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2} \cdots ⑤$$

$$W_{w,m} = R_{r,m} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2} \cdots ⑥$$

求める確率は 1 回目の操作(✻)で赤玉を取り出した場合，操作終了後の n 番の箱から赤玉を取り出す確率と 1 回目の操作(✻)で白玉を取り出した場合，操作終了後の n 番の箱から白玉を取り出す確率の和

から

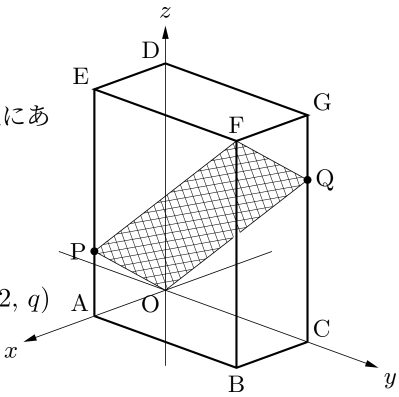
$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{3}R_{r,n}+\frac{1}{3}W_{r,n}+\frac{1}{3}R_{w,n}+\frac{2}{3}W_{w,n}\\
&=2\left(\frac{2}{3}R_{r,n}+\frac{1}{3}W_{r,n}\right)\\
&=2\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)\right\}\\
&=\frac{2}{12}\left\{2\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)+\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{6}\left\{3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\ (n\geqq 2)}
\end{aligned}
$$

◀ 後は体裁の問題 !?

$\boxed{4}$ 空間の 8 点

$$\mathrm{O}\,(0,\,0,\,0)\,,\ \mathrm{A}\,(1,\,0,\,0)\,,\ \mathrm{B}\,(1,\,2,\,0)\,,\ \mathrm{C}\,(0,\,2,\,0)\,,$$
$$\mathrm{D}\,(0,\,0,\,3)\,,\ \mathrm{E}\,(1,\,0,\,3)\,,\ \mathrm{F}\,(1,\,2,\,3)\,,\ \mathrm{G}\,(0,\,2,\,3)$$

を頂点とする直方体 OABC-DEFG を考える。点 O，点 F，辺 AE 上の点 P，および辺 CG 上の点 Q の 4 点が同一平面上にあるとする。このとき，四角形 OPFQ の面積 S を最小にするような点 P および点 Q の座標を求めよ。また，そのときの S の値を求めよ。



$\mathrm{P}\,(1,\,0,\,p)$，$0 \leqq p \leqq 3$，
$\mathrm{Q}\,(0,\,2,\,q)$，$0 \leqq q \leqq 3$ とする。

4 点 O, P, Q, F が同一平面上にあるとき，実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

とすることができる。これは

$(1,\,2,\,3) = s\,(1,\,0,\,p) + t\,(0,\,2,\,q)$

ベクトルの相等から

$(\,s\,,\,t\,) = (\,1\,,\,1\,)$，$p+q=3$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ から四角形 OPFQ は平行四辺形である。

面積公式から

$$S = \sqrt{|\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,|^2|\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\,|^2 - (\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\,)^2}$$
$$S^2 = (1+p^2)(4+q^2) - (pq)^2$$

$p+q=3$ から $q=3-p$，また p，q の範囲から $0 \leqq p \leqq 3$

$$\begin{aligned}
&= (1+p^2)\left(4+(3-p)^2\right) - \left(p\,(3-p)\right)^2 \\
&= (p^2+1)(p^2-6p+13) - p^2\,(p^2-6p+9) \\
&= (p^4-6p^3+14p^2-6p+13) - (p^4-6p^3+9p^2) \\
&= 5p^2-6p+13 \\
&= 5\left(p-\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{56}{5}
\end{aligned}$$

◀ 2 次関数なので平行完成する。
3 次以上ならば増減表を作成

S^2 は $p=\dfrac{3}{5}$ のとき最小値をとるので，S もこのとき，すなわち

$\mathrm{P}\left(1,\,0,\,\dfrac{3}{5}\right)$，$\mathrm{Q}\left(0,\,2,\,\dfrac{12}{5}\right)$ のとき，

最小値 $\sqrt{\dfrac{56}{5}} = \dfrac{2\sqrt{70}}{5}$ をとる。

5 p が素数ならば p^4+14 は素数でないことを示せ。

3 より大きい素数 p は，3 で割りきれないので，p を 3 で割った余りは 1 または 2 である。

- $p=3$ のとき $p^4+14=81+14=95$ は素数ではない

以下 0 以上の整数 n を用いて

- $p=3n+1$ のとき

$$p^4+14=(3n+1)^4+14=3N+1+14=3(N+5)$$

N は適当な自然数で表すことができ，この値は 14 より大きい 3 の倍数を表すので素数ではない。

- $p=3n+2$ のとき

$$p^4+14=(3n+2)^4+14=3N'+64+14=3(N'+26)$$

◀ $p=3n-1$ とすれば，計算が簡潔

N' は適当な自然数で表すことができ，この値は 14 より大きい 3 の倍数を表すので素数ではない。

したがって，全ての素数 p について p^4+14 が素数ではないことが示された。

【別解】（5 以上の素数は 6 を法として ± 1）

n を 0 以上の整数とする。

- $6n+2=2(3n+1)$ は 2 の倍数なので，この形の素数は 2 のみ。
- $6n+3=3(3n+1)$ は 3 の倍数なので，この形の素数は 3 のみ。
- $6n+4=2(3n+2)$ は 2 の倍数で 4 以上になることから，この形の素数はない。

したがって k を自然数として 5 以上の素数は $6k\pm 1$ の形に限る。

ここで，

- $p=2$ のとき $p^4+14=2^4+14=16+14=30$ は素数ではない。
- $p=3$ のとき $p^4+14=3^4+14=81+14=95$ は素数ではない。
- $p=6k\pm 1$ のとき

$$\begin{aligned} p^4+14 &= (6k\pm 1)^4+14 \\ &= 6K+1+14 \qquad (K \text{ は適当な整数値}) \\ &= 3(2K+5) \end{aligned}$$

右辺は 14 より大きい 3 の倍数なので素数ではない。

したがって，全ての素数 p について p^4+14 が素数ではないことが示された。