1 i を虚数単位とする。以下の問に答えよ。

(1) $n=2,3,4,5$ のとき $(2+i)^n$ を求めよ。またそれらの虚部の整数を 10 で割った余りを求めよ。

(2) n を正の整数とするとき $(2+i)^n$ は虚数であることを示せ。

(1) $(2+i)^2=\mathbf{3+4\,i}$

$(2+i)^3=(2+i)^2(2+i)=(3+4i)(2+i)=\mathbf{2+11\,i}$

$(2+i)^4=(2+i)^3(2+i)=(2+11i)(2+i)=\mathbf{-7+24\,i}$

$(2+i)^5=(2+i)^4(2+i)=(-7+24i)(2+i)=\mathbf{-38+41\,i}$

$n=2,\ 4$ のとき 4，$n=3,\ 5$ のとき 1

(2) (1) の結果から $(3+i)^n=a_n+b_n\,i$ (a_n，b_n はともに実数)としたとき，

$$\left\{\begin{array}{l} a_n \text{ を 10 で割ったときの余りは} \\ \qquad n \text{ が奇数のときは 2，偶数のときは 3} \\ b_n \text{ を 10 で割ったときの余りは} \\ \qquad n \text{ が奇数のときは 1，偶数のときは 4} \end{array}\right. \quad \cdots\cdots ⊛$$

と推測できる。

◀ (1) でいくつかの実例があるので，推測して，数学的帰納法で証明

- $n=1,\ 2$ のとき ⊛は成り立つ。

- $n=2k$ (k は自然数)のとき ⊛ が成り立つと仮定する。
  すなわち適当な整数 A，B を用いて
  $(2+i)^{2k}=(10A+3)+(10B+4)\,i\cdots①$
  とできる。ここで
  $$\begin{aligned}(2+i)^{2k+1}&=(2+i)^{2k}(2+i)\\&=((10A+3)+(10B+4)\,i)(2+i)\quad(\because ①)\\&=2(10A+3)-(10B+4)\\&\qquad+((10A+3)+2(10B+4))\,i\\&=10(2A-B)+2+(10(A+2B+1)+1)\,i\end{aligned}$$
  となり，⊛ は $n=2k+1$ のときにも成り立つ。

- $n=2k+1$ (k は自然数)のとき ⊛ が成り立つと仮定する。
  すなわち適当な整数 A，B を用いて
  $(2+i)^{2k+1}=(10A+2)+(10B+1)\,i\cdots②$
  とできる。ここで
  $$\begin{aligned}(2+i)^{2k+2}&=(2+i)^{2k+1}(2+i)\\&=((10A+2)+(10B+1)\,i)(2+i)\quad(\because ②)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\,(10A+2)-(10B+1) \\
&\qquad + ((10A+2)+2\,(10B+1))\ i \\
&= 10\,(2A-B)+3+(10\,(A+2B)+4)\ i
\end{aligned}
$$

となり，⊛ は $n=2k+2$ のときにも成り立つ。

したがって自然数 n について ⊛ が成り立つことが示された。

これは $(2+i)^n$ の虚部が 0 で無いこと，すなわち $(2+i)^n$ が虚数であることを表す。

◀ 以下，ツッコミが起こらないように記述しているだけ

2 次の定積分を求めよ。

(1) $I = \displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

(2) $J = \displaystyle\int_0^1 x^3 \log(x^2+1)\,dx$

(1) $x = \sin\theta$ とする。$\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$,

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

◀ 置換積分の典型例

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x^2} &= \sqrt{1-\sin^2\theta}\\ &= \sqrt{\cos^2\theta}\\ &= |\cos\theta|\\ &= \cos\theta \ \ (\because\ \cos\theta \geqq 0)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta\cos\theta\,d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta\\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\,d\theta\\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta\\ &= \frac{1}{8}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{16}}\end{aligned}$$

(2) $x^3 = \left(\dfrac{x^4-1}{4}\right)' = \left(\dfrac{(x^2+1)(x^2-1)}{4}\right)'$ を用いて

◀ これに気づかないと複数回の部分積分の繰り返しを行う羽目になる

$$\begin{aligned}J &= \int_0^1 \left(\frac{x^4-1}{4}\right)' \log(x^2+1)\,dx\\ &= \left[\frac{x^4-1}{4}\log(x^2+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^4-1}{4}(\log(x^2+1))'\,d\theta\\ &= 0 - \int_0^1 \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{4}\cdot\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx\\ &= -\frac{1}{4}\int_0^1 2x(x^2-1)\,dx\\ &= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x^4 - x^2\right]_0^1\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{8}}\end{aligned}$$

3 $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が垂直であるとする。$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+3\vec{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とする。以下の問に答えよ。

(1) $|\vec{a}|=x$, $|\vec{b}|=y$ とするとき，$\sin^2\theta$ を x, y を用いて表せ。

(2) θ の最大値を求めよ。

(1) $p=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+3\vec{b}$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{b}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ を用いて

$|\vec{p}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=x^2+y^2$

$|\vec{q}|^2=|\vec{a}+3\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=x^2+9y^2$

$\vec{p}\cdot\vec{q}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+3|\vec{b}|^2=x^2+3y^2$

と表すことができ，

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta &= 1-\cos^2\theta \\
&= 1-\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}\right)^2 \\
&= \frac{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)-(x^2+3y^2)^2}{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)} \\
&= \boldsymbol{\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)}}
\end{aligned}
$$

(2) (1) の結果の分母分子を x^2y^2 $(\fallingdotseq 0)$ で割り

◀ 同次式の扱い

$$\sin^2\theta=\frac{4}{\dfrac{x^2}{y^2}+10+\dfrac{9y^2}{x^2}} \quad \cdots ①$$

右辺は分母，分子ともに正の値なので，分母が最小値をとるとき，$\sin^2\theta$ が最大となる。また，$\vec{p}\cdot\vec{q}>0$ から θ は鋭角なので，$\sin\theta$ が最大となるとき θ が最大となる。

ここで，$\dfrac{x^2}{y^2}>0$, $\dfrac{9y^2}{x^2}>0$ から相加相乗平均の関係を用いて

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{9y^2}{x^2}\geqq 2\sqrt{\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{9y^2}{x^2}}=2\cdot\sqrt{9}=6$$

等号は $\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{9y^2}{x^2}=3$ および $x>0$, $y>0$ のとき

すなわち $x=\sqrt{3}y\,(>0)$ のとき成立する。このとき ① は

$$\sin^2\theta=\frac{4}{6+10}=\frac{1}{4}$$

θ は鋭角より $\sin\theta>0$ から $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

すなわち θ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$

$\boxed{4}$ m を実数とする。座標平面上の放物線 $y=x^2$ と直線 $y=mx+1$ の共有点を A，B とし，原点を O とする。以下の問に答えよ。

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2) 3 点 A，B，O を通る円の方程式を求めよ。

(3) 放物線 $y=x^2$ と (2) の円が A，B，O 以外の共有点をもたないような m の値をすべて求めよ。

(1) $\mathrm{A}(\alpha,\alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\beta^2)$ とする。α，β は

$$x^2=mx+1 \quad \text{すなわち} \quad x^2-mx-1=0 \cdots ①$$

の 2 つの解で，任意の m について実数値をとる。

解と係数の関係から $\alpha+\beta=m\cdots②$，$\alpha\beta=-1\cdots③$

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\alpha,\alpha^2)\cdot(\beta,\beta^2)=\alpha\beta+\alpha^2\beta^2=\alpha\beta(1+\alpha\beta)$$

③ から $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$ より

$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ 　が示された。

(2) (1) から，求める円は線分 AB 直径とする円である。

◀ (1)の結果から読みとる。

この円の中心 $\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ は ②，③ を用いて

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m}{2}$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\frac{1}{2}\left\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right\}=\frac{1}{2}(m^2+2)$$

また直線 AB の傾きは m であるから

$$\mathrm{AB}\,(\text{直径})=\sqrt{1+m^2}\,|\beta-\alpha|$$

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=(1+m^2)\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}\\&=(m^2+1)(m^2+4)\end{aligned}$$

したがって求める円の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{m^2+2}{2}\right)^2=\frac{(m^1+1)(m^2+4)}{4}}$$

(3) 放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,t^2)$ が (2) で求めた円周上の点であるとする。

$$\left(t-\frac{m}{2}\right)^2+\left(t^2-\frac{m^2+2}{2}\right)^2=\frac{(m^1+1)(m^2+4)}{4}$$

$$t^2-mt+\frac{m^2}{4}+t^4-(m^2+2)t^2+\frac{(m^2+2)^2}{4}$$
$$-\frac{(m^2+1)(m^2+4)}{4}=0$$

$$t^4-(m^2+1)t^2-mt=0\cdots④$$

$t=0,\ \alpha,\ \beta$ は ④ の解であることを考慮して ④ は

$$t\,(t+m)\,(t^2-mt-1)=0$$

この 4 つの解が $t=0,\ \alpha,\ \beta$ となるには

◀ 4 次方程式の実数解が，異なる 3 個になる条件

- $-m=0$ すなわち $m=0$
- $t=-m$ が $t^2-mt-1=0$ の解となるとき
  すなわち $2m^2-1=0$ から $m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

以上のことから，求める m の値は $m=\mathbf{0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

5 座標平面上を運動する点 P(x, y) の時刻 t における座標が

$$x=\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t},\ y=\frac{3\sin t}{5+4\cos t}$$

であるとき，以下の問に答えよ。

(1) 点 P と原点 O との距離を求めよ。

(2) 点 P の時刻 t における速度 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ と速さ $|\vec{v}|$ を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{5+4\cos t}$ を求めよ。

(1) $\mathrm{OP}^2=x^2+y^2$

$$\begin{aligned}
&=\frac{(4+5\cos t)^2+(3\sin t)^2}{(5+4\cos t)^2}\\
&=\frac{16+40\cos t+25\cos^2 t+9\sin^2 t}{(5+4\cos t)^2}\\
&=\frac{25+40\cos t+16\cos^2\theta}{(5+4\cos t)^2}\\
&=1
\end{aligned}$$

$\mathrm{OP}\geqq 0$ から $\mathbf{OP=1}$

(2)

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=\frac{(4+5\cos t)'(5+4\cos t)-(4+5\cos t)(5+4\cos t)'}{(5+4\cos t)^2}\\
&=\frac{(-5\sin t)(5+4\cos t)-(4+5\cos t)(-4\sin t)}{(5+4\cos t)^2}\\
&=-\frac{9\sin t}{(5+4\cos t)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt}&=\frac{(3\sin t)'(5+4\cos t)-(3\sin t)(5+4\cos t)'}{(5+4\cos t)^2}\\
&=\frac{(3\cos t)(5+4\cos t)-(3\sin t)(-4\sin t)}{(5+4\cos t)^2}\\
&=\frac{12+15\cos t}{(5+4\cos t)^2}\\
&=\frac{3(4+5\cos t)}{(5+4\cos t)^2}
\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2&=\frac{9\left((3\sin t)^2+(4+5\cos t)^2\right)}{(5+4\cos t)^4}\\
&=\frac{9}{(5+4\cos t)^2}\quad(\because\ (1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}&=\left|\frac{3}{5+4\cos t}\right|\\
&=\frac{3}{5+4\cos t}\quad(\because\ 5+4\cos t>0)
\end{aligned}$$

したがって

$$\overrightarrow{v}=\left(-\frac{9\sin t}{(5+4\cos t)^2},\ \frac{3(4+5\cos t)}{(5+4\cos t)^2}\right)$$

$$|\overrightarrow{v}|=\frac{3}{5+4\cos t}$$

(3) (1) の $\mathrm{OP}=1$ および $y=\dfrac{3\sin t}{5+4\cos t}\geqq 0$ から P は中心 O，半径 1 の $y\geqq 0$ の円弧上にある。

◀ $\displaystyle\int|\overrightarrow{v}|\,dt$ の意味

さらに (2) から $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{9\sin t}{(5+4\cos t)^2}\leqq 0$,

$t=0$ のとき $\mathrm{P}(1,0)$，$t=\pi$ のとき $\mathrm{P}(-1,0)$ から，

$t:0\to\pi$ のとき P は $(1,0)\to(-1,0)$ と戻ることなく動く。

◀ 行ったり来たりした場合は，(P の移動した距離) ≒ (弧長)

そして

$$\int_0^\pi\frac{dt}{5+4\cos t}=\frac{1}{3}\int_0^\pi|\overrightarrow{v}|\,dt$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\cdots①$$

① の右辺の $\displaystyle\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ は，点 P が $t=0$ から $t=\pi$ の間に移動した距離を表す。

先の考察から，この距離は半径 1 の円の半周なので $\dfrac{1}{2}\times 2\pi=\pi$

したがって。求める値は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$