1 i を虚数単位とする。以下の問に答えよ。ね

(1) $n=2,3,4,5$ のとき $(3+i)^n$ を求めよ。またそれらの虚部の整数を 10 で割った余りを求めよ。

(2) n を正の整数とするとき，$(3+i)^n$ は虚数であることを示せ。

(1) $(3+i)^2=\mathbf{8+6\,i}$

$(3+i)^3=(3+i)^2(3+i)=(8+6\,i)(3+i)=\mathbf{18+26\,i}$

$(3+i)^4=(3+i)^3(3+i)=(18+26\,i)(3+i)=\mathbf{28+96\,i}$

$(3+i)^5=(3+i)^4(3+i)=(28+96\,i)(3+i)=\mathbf{-12+316\,i}$

いずれの場合も，求める余りは 6

(2) (1) の結果から $(3+i)^n=a_n+b_n\,i$ (a_n，b_n はともに実数)としたとき，

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{cases} a_n \text{ を 10 で割ったときの余りは 8} \\ b_n \text{ を 10 で割ったときの余りは 6} \end{cases} \quad \cdots\cdots ⊛$$

と推測できる。

◀ (1) でいくつかの実例があるので，推測して，数学的帰納法で証明

- $n=2$ のとき ⊛は成り立つ。
- $n=k\,(\geqq 2)$ のとき ⊛ が成り立つと仮定する。

すなわち整数 A，B を用いて

$(3+i)^k=(10A+8)+(10B+6)\,i \cdots ①$

とできる。ここで

$$\begin{aligned}(3+i)^{k+1}&=(3+i)^k(3+i)\\&=((10A+8)+(10B+6)\,i)(3+i)\ \ (\because ①)\\&=3(10A+8)-(10B+6)\\&\qquad+((10A+8)+3(10B+6))\,i\\&=10(3A-B+1)+8+(10(A+3B+2)+6)\,i\end{aligned}$$

となり，⊛ は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

したがって $n\geqq 2$ の自然数について ⊛ が成り立つことが示された。

これは $(3+i)^n$ の虚部が 0 で無いこと，すなわち $(3+i)^n$ が虚数であることを表す。

◀ 以下，ツッコミが起こらないように記述しているだけ

また，$n=1$ のとき $(3+i)^1$ は虚数なので

n が正の整数のとき，$(3+i)^n$ が虚数となることが示された。

2 $k,\ x,\ y,\ z$ を実数とする。k が以下の (1)，(2)，(3) のそれぞれの場合に，不等式

$$x^2+y^2+z^2+k\,(xy+yz+zx) \geqq 0$$

が成り立つことを示せ。また等号が成り立つのはどんな場合か。

(1) $k=2$

(2) $k=-1$

(3) $-1<k<2$

$f\,(x,\ y,\ z,\ k)=x^2+y^2+z^2+k\,(xy+yz+zx)$ とする。

(1) $k=2$ のとき

$$\begin{aligned} f\,(x,\ y,\ z,\ 2) &= x^2+y^2+z^2+2\,(xy+yz+zx) \\ &= (x+y+z)^2 \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。等号は $x+y+z=0$ のときに成立。

(2) $k=-1$ のとき

$$\begin{aligned} f\,(x,\ y,\ z,\ -1) &= x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx) \\ &= \frac{1}{2}\left\{2x^2+2y^2+2z^2-2\,(xy+yz+zx)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\} \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。等号は $x-y=0$ かつ $y-z=0$ かつ $z-x=0$
すなわち $x=y=z$ のとき成立。

(3) $-1<k<2$ のとき

$$\begin{aligned} f\,(x,\ y,\ z,\ k) &= x^2+k\,(y+z)\,x+y^2+z^2+kyz \\ &= \left(x+\frac{k}{2}\,(y+z)\right)^2 \\ &\qquad -\frac{k^2}{4}(y+z)^2+y^2+z^2+kyz \\ &= \left(x+\frac{k}{2}\,(y+z)\right)^2 \\ &\qquad +\left(1-\frac{k^2}{4}\right)y^2+\left(1-\frac{k^2}{4}\right)z^2 \\ &\qquad\qquad +\left(k-\frac{k^2}{2}\right)yz \end{aligned}$$

ここで

$$g\,(y,\ z,\ k)=\left(1-\frac{k^2}{4}\right)y^2+\left(1-\frac{k^2}{4}\right)z^2+\left(k-\frac{k^2}{2}\right)yz$$

とすると

$g(y,\,z,\,k)$

$= \dfrac{(2+k)(2-k)}{4}y^2 + \dfrac{(2+k)(2-k)}{4}z^2 + \dfrac{k(2-k)}{2}yz$

$= \dfrac{2-k}{4}\left\{(2+k)\,y^2 + (2+k)\,z^2 + 2kyz\right\}$

$= \dfrac{2-k}{4}\left\{(2+k)\left(y+\dfrac{k}{2+k}z\right)^2 - \dfrac{k^2}{2+k}z^2 + (2+k)\,z^2\right\}$

$= \dfrac{2-k}{4}\left\{(2+k)\left(y+\dfrac{k}{2+k}z\right)^2 + \dfrac{(2+k)^2-k^2}{2+k}z^2\right\}$

$= \dfrac{2-k}{4}\left\{(2+k)\left(y+\dfrac{k}{2+k}z\right)^2 + \dfrac{4(1+k)}{2+k}z^2\right\}$

とでき，$\dfrac{2-k}{4}>0$，$2+k>0$，$4(1+k)>0$，$2+k>0$ から任意の実数 y，z，k について $g(y,\,z,\,k) \geqq 0$ が成り立つ。

等号は $y+\dfrac{k}{2+k}z=0$ かつ $z=0$ すなわち $(\,y\,,\,z\,)=(\,0\,,\,0\,)$ のときに成立する。

また $f(x,\,y,\,z,\,k) = \left(x+\dfrac{k}{2}(y+z)\right)^2 + g(y,\,z,\,k)$ であり

$g(y,\,z,\,k) \geqq 0$ から $f(x,\,y,\,z,\,k) \geqq 0$ が成り立つ。

等号は $x+\dfrac{k}{2}(y+z)=0$ かつ $g(x,\,y,\,z,\,k)=0$ すなわち $(x,\,y,\,z)=(0,\,0,\,0)$ のときに成り立つ。

【別解】

正の実数 α，β を用いて

(1) の結果の両辺を α 倍，(1) の結果の両辺を β 倍し

$\alpha(x^2+y^2+z^2)+2\alpha(xy+yz+zx) \geqq 0 \cdots$①

$\beta(x^2+y^2+z^2)-\beta(xy+yz+zx) \geqq 0 \cdots$②

辺々加えて

$(\alpha+\beta)(x^2+y^2+z^2)+(2\alpha-\beta)(xy+yz+zx) \geqq 0$

$\alpha+\beta=1$，$2\alpha-\beta=k$ とすると

$(\,\alpha\,,\,\beta\,) = \left(\,\dfrac{1+k}{3}\,,\,\dfrac{2-k}{3}\,\right) \cdots$③

$-1<k<2$ のとき $\alpha>0$ かつ $\beta>0$

さらに (1) と (2) の等号成立条件の論理積 $x+y+z=0$ かつ $x=y=z$ すなわち $x=y=z=0$ とすることができるので，

$-1<k<2$ のとき，与えられた不等式は成り立ち，等号は $x=y=z=0$ のとき成立。

$\boxed{3}$ 水平な地面に一本の塔が垂直に建っている。(大きさは無視する)。塔の先端を P とし，足元の地点を H とする。また，H を通らない一本の道が一直線に延びている(幅は無視する)。道の途中に 3 地点 A, B, C がこの順にあり，$BC = 2AB$ をみたしている。以下の問に答えよ。

(1) $2AH^2 - 3BH^2 + CH^2 = 6AB^2$ が成り立つことを示せ。

(2) A, B, C から P を見上げた角度 $\angle PAH$, $\angle PBH$, $\angle PCH$ はそれぞれ $45°$, $60°$, $30°$ であった。$AB = 100m$ のとき，塔の高さ PH(m) の整数部分を求めよ。

(3) (2) において，H と道との距離 (m) の整数部分を求めよ。

(1) 線分 BC の中点を M とし，$AB = BM = MC = x$ とする。

△HAM に中線定理を用いて

$$HA^2 + HM^2 = 2(HB^2 + x^2) \quad \cdots ①$$

△HBC に中点定理を用いて

$$HB^2 + HC^2 = 2(HM^2 + x^2) \quad \cdots ②$$

① × 2 + ②

$$2(HA^2 + HM^2) + HB^2 + HC^2$$
$$= 4(HB^2 + x^2) + 2(HM^2 + x^2)$$
$$2HA^2 + HB^2 + HC^2 = 4HB^2 + 6x^2$$

すなわち

$2AH^2 - 3BH^2 + CH^2 = 6AB^2$ が成り立つ。

(2) $AH = \tan 45° PH = PH$，$BH = \tan 30° PH = \dfrac{1}{\sqrt{3}} PH$,

$CH = \tan 60° PH = \sqrt{3} PH$ を (1) の結果に代入する。

$$2PH^2 - 3 \cdot \frac{1}{3} PH^2 + 3PH^2 = 6 \cdot 100^2$$
$$4PH^2 = 6 \cdot 4 \cdot 50^2$$

$PH > 0$ から $PH = 50\sqrt{6} = \sqrt{15000}$，ここで

$122^2 = 14884$，$123^2 = 15129$ から求める整数部分は **122**

(3) (2) の結果から $HA = 50\sqrt{6}$，$HB = 50\sqrt{2}$，$AB = 100$ である。

$$HA^2 = HB^2 + AB^2$$

が成り立つので，△HAB は $\angle ABH = 90°$ の直角三角形である。

したがって H から AB までの距離は $HB = 50\sqrt{2} = \sqrt{5000}$

同様に $70^2 = 4900$，$71^2 = 5041$ から求める整数部分は **70**