1 三角形 OAB において，辺 AB を 2:1 に内分する点を D とし，直線 OA に関して点 D と対称な点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$|\vec{a}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ を満たすとする。

(1) 点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 三角形 BDE の面積が $\frac{5}{9}$ になるとき，$|\vec{b}|$ の値を求めよ。

(1) 実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=k\vec{a}\cdots$① とできる。
$\overrightarrow{\mathrm{BF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{BF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ より

$$(\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

$$(k\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$$

$$k\,\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{a}=0$$

$$16k-6=0$$

$$k=\frac{3}{8}$$

① に代入し，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{3}{8}\vec{a}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+1}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$
次に，点 D から直線 OA に下ろした垂線の足を H とする。
実数 h を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=h\overrightarrow{\mathrm{OA}}=h\vec{a}\cdots$② とできる。
$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より

$$(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

$$\left(h\vec{a}-\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)\right)\cdot\vec{a}=0$$

$$h\,\vec{a}\cdot\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{a}=0$$

$$16h-\frac{16}{3}-4=0$$

$h=\dfrac{7}{12}$ となり $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{7}{12}\vec{a}$

最後に，点 E は，線分 DH を 2:1 に外分する点なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{OD}}+2\overrightarrow{\mathrm{OH}}}{2+(-1)}\\&=-\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)+2\left(\frac{7}{12}\vec{a}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{5}{6}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}}\end{aligned}$$

(3) (2) の H を用いて $\triangle\mathrm{BDE}=\dfrac{5}{9}$ のとき，$\triangle\mathrm{BDH}=\dfrac{5}{18}$
さらに $\triangle\mathrm{BHA}=3\triangle\mathrm{BDH}=\dfrac{5}{6}$

◀ $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ を用いて直接面積計算すると煩雑なので，計算を簡素化する工夫

$\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{12}{5}\triangle\mathrm{BHA} = 2$ となる。

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OAB} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\,\vec{a}\,|^2|\,\vec{b}\,|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{16|\,\vec{b}\,|^2 - 36} \\ &= \sqrt{4|\,\vec{b}\,|^2 - 9}\end{aligned}$$

◀ ベクトルの重要な面積公式

$\sqrt{4|\,\vec{b}\,|^2 - 9} = 2$　を解く

辺々平方し

$$\begin{aligned}4|\,\vec{b}\,|^2 - 9 &= 4 \\ |\,\vec{b}\,|^2 &= \frac{13}{4}\end{aligned}$$

$|\,\vec{b}\,| \geqq 0$ から $\boldsymbol{|\,\vec{b}\,| = \dfrac{\sqrt{13}}{2}}$

2 a を $a \fallingdotseq -3$ を満たす定数とする。放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$ における接線を ℓ_1, 点 $\mathrm{B}\left(a+2,\ \frac{(a+2)^2}{2}\right)$ における接線を ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 の交点を C とおく。

(1) C の座標を a を用いて表せ。

(2) a が $a>0$ を満たしながら動くとき，$\frac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}$ が最小となるときの a の値を求めよ。ただし，$|\mathrm{AB}|$ および $|\mathrm{BC}|$ はそれぞれ線分 AB と線分 BC の長さを表す。

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$ のとき $y'=x$ から ℓ_1 の方程式は

$$y=-1\cdot(x+1)+\frac{1}{2}$$

すなわち

$$y=-x-\frac{1}{2}\ \cdots①$$

ℓ_2 の方程式は

$$y=(a+2)(x-(a+2))+\frac{(a+2)^2}{2}$$

すなわち

$$y=(a+2)x-\frac{(a+2)^2}{2}\ \cdots②$$

C の x 座標は

$$-x-\frac{1}{2}=(a+2)x-\frac{(a+2)^2}{2}\quad \text{を解いて}$$

$$\begin{aligned}(a+3)x&=\frac{1}{2}\left\{(a+2)^2-1\right\}\\&=\frac{1}{2}(a+3)(a+1)\end{aligned}$$

$a+3 \fallingdotseq 0$ から $x=\frac{1}{2}(a+1)$，C は ① 上の点なので

C の座標は $\mathbf{C\left(\frac{a+1}{2},\ -\frac{a+2}{2}\right)}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(a+3,\ \frac{(a+3)(a+1)}{2}\right)$,

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(-\frac{a+3}{2},\ -\frac{(a+2)(a+3)}{2}\right)$ であり,

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2&=(a+3)^2\left\{1+\left(\frac{a+1}{2}\right)^2\right\}\\&=\frac{(a+3)^2}{4}(a^2+2a+5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2&=\frac{(a+3)^2}{4}\left\{1+(a+2)^2\right\}\\&=\frac{(a+3)^2}{4}\left\{a^2+4a+5\right\}\end{aligned}$$

$a+3 \fallingdotseq 0$ から

$$\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2}=\frac{a^2+2a+5}{a^2+4a+5}$$
$$=1-\frac{2a}{a^2+4a+5}$$

◀ 数 Ⅲ の分数関数の微分を用いてもよい。

$a>0$ のとき，右辺が最小になるのは $\dfrac{2a}{a^2+4a+5}$ が最大になるとき，すなわち $\dfrac{a^2+4a+5}{2a}$ が最小になるときなので

$$\frac{a^2+4a+5}{2a}=\frac{1}{2}\left(a+4+\frac{5}{a}\right) \cdots ③$$

$a>0$，$\dfrac{5}{a}>0$ から，相加相乗平均の関係を用いて

$$(③ \text{ の右辺})=2+\frac{1}{2}\left(a+\frac{5}{a}\right)$$
$$\geqq 2+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a\cdot\frac{5}{a}}$$
$$=2+\sqrt{5}$$

等号は $a=\dfrac{5}{a}$，$a+\dfrac{5}{a}=2\sqrt{5}$ すなわち $a=\sqrt{5}$ のとき成立。

$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|} \geqq 0$ から，この値が最小になるのも $\boldsymbol{a=\sqrt{5}}$ のときである。

3 正の実数 x, y が方程式

$$\frac{9^{4x}+9^{y^2+1}}{6}=3^{4x+y^2}\quad\cdots\cdots(*)$$

を満たすとする。

(1) y^2 を x を用いて表せ。

(2) 正の実数 x, y が(*)および $1-\frac{x}{y}>0$ を満たしながら動くとき,

$$\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}$$

の最大値を求めよ。

(1) $3^{4x}=X>0$, $3^{y^2}=Y>0$ とすると

$$9^{4x}=\left(3^2\right)^{4x}=\left(3^{4x}\right)^2=X^2$$

$$9^{y^2+1}=9^1\cdot 9^{y^2}=9Y^2$$

$$3^{4x+y^2}=3^{4x}\cdot 3^{y^2}=XY$$

(*) は

$$\frac{X^2+9Y^2}{6}=XY$$

$$X^2+9Y^2=6XY$$

$$(X-3Y)^2=0$$

$$Y=\frac{1}{3}X$$

両辺正であるから，3 を底とする対数をとり

$$\log_3 Y=\log_3\frac{1}{3}X$$

$$\log_3 3^{y^2}=\log_3\frac{1}{3}+\log_3 3^{4x}$$

したがって $\boldsymbol{y^2=4x-1}$ $\cdots$①

(2) $1+\frac{x}{y}>0$, $1-\frac{x}{y}>0$ のとき

$$\log_{1+\frac{x}{y}}4=\frac{1}{\log_4 1+\frac{x}{y}},$$

$$\log_{1-\frac{x}{y}}4=\frac{1}{\log_4 1-\frac{x}{y}}\quad \text{から}$$

与式の値を P とすると

$$\begin{aligned}P&=\log_4\left(1+\frac{x}{y}\right)+\log_4\left(1-\frac{x}{y}\right)\\&=\log_4\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{x}{y}\right)\\&=\log_4\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\end{aligned}$$

底の 4 は 1 より大きいので P が最大になるのは真数が最大となるときである。

$x>0$, $y>0$, $x=\dfrac{y^2+1}{4}$, $1-\dfrac{x}{y}>0$ すなわち

$$x=\frac{y^2+1}{4} \quad \text{かつ} \quad 2-\sqrt{3}<y<2+\sqrt{3} \cdots ②$$

の条件のもとで $\dfrac{x^2}{y^2}$ の最小値，したがって $\dfrac{x}{y}$ の最小値を考える。

$$\begin{aligned}\frac{x}{y} &= \frac{\dfrac{y^2+1}{4}}{y}\\ &= \frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{y}\right)\\ &\geqq \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{y\cdot\frac{1}{y}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

等号が成り立つのは $y=\dfrac{1}{y}$ かつ $y+\dfrac{1}{y}=2$ すなわち $y=1$ のときで，これは ① を満たしている。

したがって $(x, y)=\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ のとき $\dfrac{x}{y}$ の最小値は $\dfrac{1}{2}$ であり，P の最大値は $\log_4\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)=\boldsymbol{\log_4\dfrac{3}{4}}$

4 $a_1=2$, $b_1=1$ および

$$a_{n+1}=2a_n+3b_n,\ b_{n+1}=a_n+2b_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められた数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。$c_n=a_nb_n$ とおく。

(1) c_2 を求めよ。

(2) c_n は偶数であることを示せ。

(3) n が偶数のとき, c_n は 28 で割りきれることを示せ。

(1) $a_2=2a_1+3b_1=4+3=7$, $b_2=2+2=4$

したがって $c_2=a_2b_2=$ **28**

(2) 漸化式から, すべての n について a_n, b_n はともに整数である。

背理法により証明する。

すなわち適当な $n\,(\geqq 2)$ について $c_n=a_nb_n$ が奇数と仮定する。

これは a_n, b_n がともに奇数であることを表す。

$$a_n=2a_{n-1}+3b_{n-1}$$

であり, a_n が奇数であることは b_{n-1} が奇数であることを表し,

$$b_n=a_{n-1}+2b_{n-1}$$

であり, b_n が奇数であることは a_{n-1} が奇数であることを表す。

以下, 順に $n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 2,\ 1$ とすると

a_1, b_1 ともに奇数ということになるが $a_1=2$ なので矛盾。

したがって a_n, b_n がともに奇数となることはないので c_n が偶数となることが示された。

(3) n が偶数のとき c_n が 28 の倍数となることを示す。

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=2a_{n+1}+3b_{n+1}\\&=2\,(2a_n+3b_n)+3\,(a_n+2b_n)\\&=7a_n+12b_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_{n+2}&=a_{n+1}+b_{n+1}\\&=(2a_n+3b_n)+2\,(a_n+2b_n)\\&=4a_n+7b_n\end{aligned}$$ から

$$\begin{aligned}c_{n+2}&=a_{n+2}b_{n+2}\\&=(7a_n+12b_n)(4a_n+7b_n)\\&=28{a_n}^2+97a_nb_n+84{b_n}^2\\&=28\left({a_n}^2+3{b_n}^2\right)+97c_n\ \cdots ①\end{aligned}$$

- (1) から c_2 は 28 の倍数である。
- ① は c_n が 28 の倍数のとき c_{n+2} も 28 の倍数となることを表

している。

以上のことから n が偶数のとき，c_n は 28 の倍数であることが示された。

◀ いわゆる帰納法

5 座標平面上で，媒介変数 θ を用いて

$$x=(1+\cos\theta)\cos\theta,\ y=\sin\theta\ \ (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

と表される曲線 C がある。C 上の点で x 座標が最小になる点を A とし，A の x 座標の値を a とおく。B を点 $(a, 0)$，O を原点 $(0, 0)$ とする。

(1) a を求めよ。

(2) 線分 AB と線分 OB と C で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)
$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta}&=(-\sin\theta)\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta)\\&=-\sin\theta\,(1+2\cos\theta)\end{aligned}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき $-\sin\theta\leqq 0$ から，$1+2\cos\theta$ の符号を考え

θ	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	0	$+$	
x		$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	

増減表から $\boldsymbol{a=-\frac{1}{4}}$

(2) $\dfrac{dy}{d\theta}=\cos\theta$ から曲線の概形は

	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2}{3}\pi$		π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
x	2	$\leftarrow$	0	$\leftarrow$	$-\frac{1}{4}$	$\rightarrow$	0
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y	0	$\uparrow$	1	$\downarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\downarrow$	0
(x, y)	$(2, 0)$	$\nwarrow$	$(0, 1)$	$\swarrow$	$\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\searrow$	$(0, 0)$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}y\,dx\\&=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin\theta\,(-\sin\theta\,(1+2\cos\theta))\,d\theta\\&=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}(-\sin^2\theta)\,d\theta-2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta\\&=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\frac{\cos 2\theta-1}{2}\,d\theta-2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin^2\theta(\cos\theta)'\,d\theta\\&=\left[\frac{1}{4}\sin 2\theta-\frac{1}{2}\theta\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}-\frac{2}{3}\left[\sin^3\theta\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\\&=\left(0-\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{2}{3}\left(0-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\end{aligned}$$

◀ x 軸に沿った積分による面積の定義

◀ $\sin\theta$，$\cos\theta$ の偶数次と奇数次で積分方法を使い分ける

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}$$