1 初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で表される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ を求めよ。

(1) まず $a_1 = S_1 = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 9 = 3$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7) - \frac{1}{6}(n-1)n(2n+5) \\ &= \frac{1}{6}n\{(2n^2+9n+7) - (2n^2+3n-5)\} \\ &= \frac{1}{6}n(6n+12) \\ &= n(n+2) \end{aligned}$$

これは $a_1 = 3$ を満たす。したがって

$$\boldsymbol{a_n = n(n+2)}$$

◀ S_n で定義される数列の基本型

(2) (1) から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2) - 2(n+2) - 2(n+1)}{2(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3n^2+5n}{2(n+1)(n+2)} \\ &= \boldsymbol{\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}} \end{aligned}$$

◀ 部分分数分解の基本型
$a \fallingdotseq 0$ のとき

$$\frac{1}{X(X+a)} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+a}\right)$$

2 三角形 OAB において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D，直線 OA に関して点 D と対称な点を E，点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とし，$|\vec{a}| = 4$，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ を満たすとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) $9|\overrightarrow{\mathrm{OE}}| = 20|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|$ となるとき，$|\vec{b}|$ の値を求めよ。

(1) 実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} = k\vec{a}$ $\cdots$ ① とできる。

$\overrightarrow{\mathrm{BF}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{BF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$ より

$$(\overrightarrow{\mathrm{OF}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$$

$$(k\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$$

$$k\,\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{a} = 0$$

$$16k - 6 = 0$$

$$k = \frac{3}{8}$$

① に代入し，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{3}{8}\vec{a}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+1} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}$

次に，点 D から直線 OA に下ろした垂線の足を H とする。

実数 h を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = h\overrightarrow{\mathrm{OA}} = h\vec{a}$ $\cdots$ ② とできる。

$\overrightarrow{\mathrm{DH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{DH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より

$$(\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$$

$$\left(h\vec{a} - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right)\right) \cdot \vec{a} = 0$$

$$h\,\vec{a} \cdot \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} \cdot \vec{a} = 0$$

$$16h - \frac{16}{3} - 4 = 0$$

$h = \dfrac{7}{12}$ となり $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{7}{12}\vec{a}$

最後に，点 E は，線分 DH を 2 : 1 に外分する点なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \frac{-\overrightarrow{\mathrm{OD}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OH}}}{2 + (-1)} \\ &= -\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) + 2\left(\frac{7}{12}\vec{a}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{5}{6}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}}\end{aligned}$$

(3) (1) から $|\overrightarrow{\mathrm{OF}}| = \dfrac{3}{8}|\vec{a}| = \dfrac{3}{8} \cdot 4 = \dfrac{3}{2}$ であり，(2) の結果と合わ

せて

$$9|\overrightarrow{\mathrm{OE}}| = 20\cdot\frac{3}{2} = 30$$

$$3|\overrightarrow{\mathrm{OE}}| = 10$$

$$9|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2 = 100$$

$$9\left|\frac{5}{6}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}\right|^2 = 100$$

$$\frac{9}{36}|5\vec{a} - 4\vec{b}|^2 = 100$$

$$25\cdot\vec{a}\cdot\vec{a} - 40\vec{a}\cdot\vec{b} + 16\vec{b}\cdot\vec{b} = 400$$

$$16|\vec{b}|^2 = 240$$

$$|\vec{b}|^2 = 15$$

$|\vec{b}| \geqq 0$ から $\boldsymbol{|\vec{b}| = \sqrt{15}}$

3 実数 x に対して,

$$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+4\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

とおく。

(1) $t=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ とおく。$\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$ と $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ をそれぞれ t の式で表せ。

(2) $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき,方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。

(1) $x+\frac{2\pi}{3}=\theta$ とする。

$t=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$ から $\cos\theta=-t$ とでき

$$\begin{aligned}\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)&=\sin^2\theta\\&=1-\cos^2\theta\\&=1-(-t)^2\\&=\mathbf{1-t^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)&=\cos(2\theta-\pi)\\&=-\cos2\theta\\&=-(2\cos^2\theta-1)\\&=-\left(2(-t)^2-1\right)\\&=\mathbf{-2t^2+1}\end{aligned}$$

(2) $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $\frac{\pi}{6} \leqq x+\frac{\pi}{6} \leqq \frac{\pi}{6}+\pi \cdots$ ①

したがって $-\frac{1}{2} \leqq \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \leqq 1$

すなわち $-\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \cdots$ ②

(1) の結果を用いて,方程式 $f(x)=0$ を t を用いて書きなおすと

$$\sqrt{3}t+2(1-t^2)+4(-2t^2+1)=0$$

$$10t^2-\sqrt{3}t-6=0$$

$$\left(5t+2\sqrt{3}\right)\left(2t-\sqrt{3}\right)=0$$

② から $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ となり ① の範囲で

$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$, すなわち $x=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}},\ \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

4 k を $k>-1$ を満たす実数とする。直線 $\ell:y=(1-k)x+k$ および放物線 $C:y=x^2$ を考える。C と ℓ で囲まれた部分の面積を S_1 とし，C と ℓ と直線 $x=2$ の 3 つで囲まれた部分の面積を S_2 とする。

(1) S_1 を用いて表せ。

(2) S_2 を用いて表せ。

(3) k が $k>-1$ を満たしながら動くとき，S_2-S_1 の最大値を求めよ。

(1) C と ℓ の共有点の x 座標は

$x^2=(1-k)x+k$ を解いて

$x^2-(1-k)x-k=0$

$(x-1)(x+k)=0$ から $x=1,\ -k$

$k>-1$ のとき $-k<1$ であり

$-k\leqq x\leqq 1$ で $x^2\leqq(1-k)x+k$ から

$$\begin{aligned} S_1&=\int_{-k}^{1}\{x^2-(1-k)x+k\}\,dx\\ &=\int_{-k}^{1}\{-(x+k)(x-1)\}\,dx\\ &=-\frac{-1}{6}(1-(-k))^3\\ &=\boldsymbol{\frac{1}{6}(k+1)^3} \end{aligned}$$

(2) C と ℓ の交点の 1 つ $\mathrm{P}(1,1)$，ℓ 上の点 $\mathrm{Q}(2,2-k)$，C 上の点 $\mathrm{R}(2,4)$ とする。

S_2 は三角形 PQR の面積から C と直線 PR で囲まれた部分の面積を引いたものなので

$$\begin{aligned} S_2&=\frac{1}{2}\cdot 1\,(2+k)-\int_{1}^{2}\{-(x-1)(x-2)\}\,dx\\ &=\frac{1}{2}(1+k)-\frac{1}{6}\\ &=\boldsymbol{\frac{1}{2}k+\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

(3) $f(k)=S_2-S_1$ とする。(1)，(2) から

$$\begin{aligned} f'(k)&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(k+1)^2\\ &=-\frac{1}{2}(k^2+2k)\\ &=-\frac{1}{2}k(k+2) \end{aligned}$$

$k > -1$ の範囲で増減表は

k	0	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(k)$		$+$	0	$-$
$f(k)$		$\nearrow$	$\dfrac{2}{3}$	$\searrow$

したがって，求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ $(k = 0)$