1 1000 以下の素数は 250 個以下であることを示せ。

記号 n(集合) は，集合に属する要素の個数を表すものとする。

$U=\{1000$ 以下の自然数 $\}$ $(n(U)=1000)$とし，以下述べる集合は U の部分集合とする。

$A=\{2$ の倍数の集合 $\}$，$B=\{3$ の倍数の集合 $\}$，

$C=\{5$ の倍数の集合 $\}$，$D=\{7$ の倍数の集合 $\}$ とすると

$n(A)=500$，$n(B)=333$，$n(C)=200$，$n(D)=142$，

$n(A\cap B)=166$，$n(A\cap C)=100$，$n(A\cap D)=71$，

$n(B\cap C)=66$，$n(B\cap D)=47$，$n(C\cap D)=28$，

$n(A\cap B\cap C)=33$，$n(A\cap B\cap D)=23$，

$n(A\cap C\cap D)=14$，$n(B\cap C\cap D)=9$，

$n(A\cap B\cap C\cap D)=4$ から

$$
\begin{aligned}
&n(A\cup B\cup C\cup D)\\
&=n(A)+n(B)+n(C)+n(D)\\
&\quad -n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(A\cap D)\\
&\quad -n(B\cap C)-n(B\cap D)-n(C\cap D)\\
&\quad +n(A\cap B\cap C)+n(A\cap B\cap D)\\
&\quad +n(A\cap C\cap D)+n(B\cap C\cap D)\\
&\quad -n(A\cap B\cap C\cap D)\\
&=500+333+200+142-166-100-71-66-47-28\\
&\qquad +33+23+14+9-4=772
\end{aligned}
$$

$A\cup B\cup C\cup D$ のうち，2，3，5，7 は素数なので，素数となる可能性がある数の個数は $1000-(772-4)=232$ である。

したがって 1000 以下の素数は 250 個以下であることが示された。

◀ 集合の要素の個数
$n(A\cup B)$
$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
の応用

◀ 最初 A，B，C の 3 つで行ったが，250 までには減らせなかった舞台裏がある

〔包除原理〕

全体集合 U と，その部分集合 A，B，C について，

例えば $\dfrac{n(A)}{n(U)}=P(A)$ などと表す。

確率の言葉を用いて，各 P(集合) が独立(積の法則が成り立つ)ならば

$$
\begin{aligned}
&P(A\cup B\cup C)\\
&=P(U)-P\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)\\
&=P(U)-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\\
&=1-(1-P(A))(1-P(B))(1-P(C))\\
&=P(A)+P(B)+P(C)\\
&\quad -P(A)P(B)-P(B)P(C)-P(C)P(A)\\
&\qquad +P(A)P(B)P(C)\\
&=P(A)+P(B)+P(C)\\
&\quad -P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)
\end{aligned}
$$

本問の解答のように 4 つの集合についても

$$
\begin{aligned}
&1-(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \\
&=a+b+c+d-ab-ac-ad-bc-bd-cd \\
&\quad +abc+abd+acd+bcd-abcd
\end{aligned}
$$

のように計算できる。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数 x に対し，x を超えない最大の整数を $[\,x\,]$ で表す。数列 $\{a_k\}$ を

$$a_k = 2^{[\sqrt{k}]} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義する。正の整数 n に対して

$$b_n = \sum_{k=1}^{n^2} a_k$$

を求めよ。

任意の自然数 j について，$\left[\sqrt{k}\,\right] = j$ となるのは

$$j \leqq \sqrt{k} < j+1 \quad \text{すなわち} \quad j^2 \leqq k < (j+1)^2$$

$k = j^2,\ j^2+1,\ \cdots,\ j^2+2k$ の $2j+1$ 個ある。したがって

$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = \sum_{j=1}^{n-1} (2j+1)\cdot 2^j + 2^n$$

ここで，$S_n = \sum_{j=1}^{n-1} (2j+1)\cdot 2^j$ について

$$\begin{aligned} S_n &= 3\cdot 2^1 + 5\cdot 2^2 + \cdots + (2n-3)\cdot 2^{n-2} + (2n-1)\cdot 2^{n-1} \\ 2S_n &= \qquad\quad 3\cdot 2^2 + 5\cdot 2^3 + \cdots + (2n-3)\cdot 2^{n-1} + (2n-1)\cdot 2^n \end{aligned}$$

辺々引き算して

$$\begin{aligned} -S_n &= 3\cdot 2^1 + 2\cdot 2^2 + \cdots + 2\cdot 2^{n-1} - (2n-1)\cdot 2^n \\ &= 3\cdot 2^1 + 8\cdot \frac{2^{n-2}-1}{2-1} - (2n-1)\cdot 2^n \\ &= 6 + 2\cdot 2^n - 8 - n\cdot 2^{n+1} + 2^n \\ S_n &= n\cdot 2^{n+1} - 3\cdot 2^n + 2 \end{aligned}$$

$S_1 = 0$ となるので $n = 1$ のときも条件を満たすことがわかる。

したがって

$$b_n = S_n + 2^n = n\cdot 2^{n+1} - 2\cdot 2^n + 2 = \boldsymbol{(n-1)\cdot 2^{n-1} + 2}$$

◀ いわゆるガウスの関数

$[\,x\,] = n$ のとき

- x が有理数であれば
  $n \leqq x < n+1$
- x が無理数であれば
  $n < x < n+1$

この等号の差を問題になることがある。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問に答えよ。

(1) a，b を実数とし，2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ が実数解 α，β をもつとする。ただし，重解の場合は $\alpha=\beta$ とする。3 辺の長さが 1，α，β である三角形が存在する $(a\,,b)$ の範囲を求め図示せよ。

(2) 3 辺の長さが 1，α，β である三角形が存在するとき，

$$\frac{\alpha\beta+1}{(\alpha+\beta)^2}$$

の値の範囲を求めよ。

(1) 解と係数の関係から $\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=b$ である。

$\alpha>0$ かつ $\beta>0$ となる条件は

- （判別式）$\geqq 0$ から $a^2-4b\geqq 0\cdots$①
- $\alpha+\beta>0$ から $a>0\cdots$②
- $\alpha\beta>0$ から $b>0\cdots$③

正の 3 つの数 1, α, β が三角形の 3 辺となる条件は

$|\alpha-\beta|<1<\alpha+\beta\cdots$④　であり

$|\alpha-\beta|<1$ について，両辺非負なので平方し

$|\alpha-\beta|^2<1^2$

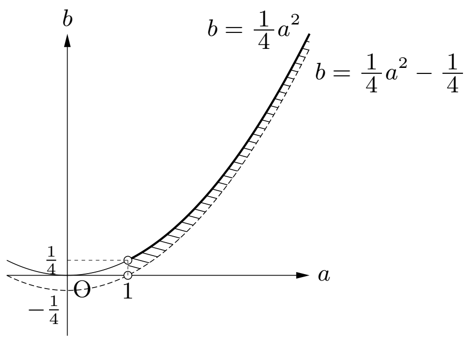
$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta<1$

$a^2-4b<1\cdots$⑤

$1<\alpha+\beta$ については $1<a\cdots$⑥

したがって ①，②，③，⑤，⑥ を同時に満たす $(a\,,b)$ を図示すると

◀ ④ が成り立つと，②，③ が成り立つことが示せるが，悩むぐらいなら素直に ②，③ を明記しておく



図の斜線部で，境界は $b=\dfrac{1}{4}a^2$ の $a>1$ の部分のみ含み，他は含まない。

(2) 与えられた式の値を k とする。$\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=b$ とすると (1)

で求めた (a, b) が満たす領域のもとで，$k=\dfrac{b+1}{a^2}$ $\cdots$ ⑦ のとり得る値の範囲を求めることになる。

◀ 領域における最大，最小（今回最大値ではないが）

⑦ を $b=ka^2-1$ とし，頂点 $(0, -1)$，a^2 の係数が $k(>0)$ である放物線と考える。

k の上限は ⑦ が，点 $\left(1, \dfrac{1}{4}\right)$ を通るときで，
このとき $k=\dfrac{5}{4}$ から $k<\dfrac{5}{4}$ $\cdots$ ⑧

k の下限は ⑦ が (1) の領域の境界の 1 つである $b=\dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{1}{4}$ と平行移動して重なるとき，このとき $k=\dfrac{1}{4}$ から $k>\dfrac{1}{4}$ $\cdots$ ⑨

⑧，⑨ の共通範囲から $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}<\dfrac{\alpha\beta+1}{(\alpha+\beta)^2}<\dfrac{5}{4}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$　$k>0$ とする。円 C を $x^2+(y-1)^2=1$ とし，放物線 S を $y=\dfrac{1}{k}x^2$ とする。

(1)　C と S が共有点をちょうど 3 個持つときの k の範囲を求めよ。

(2)　k が (1) の範囲を動くとき，C と S の共有点のうちで x 座標が正の点を P とする。P における S の接線と y 軸とによって囲まれる領域の面積の最大値を求めよ。

(1)　$x^2+(y-1)^2=1\cdots$①，$y=\dfrac{1}{k}x^2\cdots$② とする。

② を $x^2=ky$ とし，① に代入する。

$$ky+(y-1)^2=1$$

$$y^2+(k-2)\,y=0\cdots③$$

$$y\,(y+(k-2))=0 \quad \text{から} \quad y=0,\ 2-k$$

② は

$y>0$ のとき対応する x の値は 2 個,

$y=0$ のとき対応する x の値は 1 個,

$y<0$ のとき対応する 実数 x の値はないので,

①，② の連立方程式が，異なる 3 個の $(x\,,\,y)$ の組をもつのは y の 2 次方程式 ③ が 0 と正の解を 1 つずつもつことである。

したがって $2-k>0$ および $k>0$ から $\mathbf{0<k<2}$

◀ y を消去し，x の 4 次方程式が異なる 3 個の実数解をもつ条件としてもよい

(2)　$0<k<2$ のとき (1) から $x^2=ky=0,\ k\,(2-k)$

$x=0,\ \pm\sqrt{k\,(2-k)}$ で最大のものは $\sqrt{k\,(2-k)}$ である。

説明のため $f(x)=\dfrac{1}{k}x^2$，$\sqrt{k\,(2-k)}=\alpha$ とする。

$0\leqq x\leqq\alpha$ において $f(x)\geqq f'(\alpha)\,(x-\alpha)+f\,(\alpha)$ から

求める面積を T とすると

$$\begin{aligned}
T&=\int_0^{\alpha}\{f(x)-(f'(\alpha)\,(x-\alpha)+f\,(\alpha))\}\,dx\\
&=\int_0^{\alpha}\frac{1}{k}(x-\alpha)^2\,dx\\
&=\left[\frac{1}{3k}(x-\alpha)^3\right]_0^{\alpha}\\
&=\frac{\alpha^3}{3k}\\
&=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{k^3(2-k)^3}{k^2}}\\
&=\frac{1}{3}\sqrt{k(2-k)^3}
\end{aligned}$$

◀ 被積分関数が完全平方式になることを意識する

T が最大となるのは，根号内の $k(2-k)^3$ が最大となるときである。さらに $2-k=t$ とすると $0<k<2$ のとき $0<t<2$ でありこの範囲で $k(2-k)^3=(2-t)\,t^3$ の最大値を求める。

$g(t)=(2-t)\,t^3=2t^3-t^4$ とし，$g'(t)=6t^2-4t^3=2t^2\,(3-2t)$

増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$	$\frac{27}{16}$	$\searrow$	

$g(t)$ の最大値は $\dfrac{27}{16}$,

したがって T の最大値は $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{27}{16}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

$\left(t = \dfrac{3}{2}\right.$ すなわち $k = \dfrac{1}{2}$ のとき$\left.\right)$

5 サイコロを 3 回投げて出た目を順に a, b, c とするとき,

$$\int_{a-3}^{a+3} (x-b)(x-c)\,dx = 0$$

となる確率を求めよ。

関数のグラフ全体を x 軸方向に $-a$ 平行移動すると

積分区間は $-3 \leqq x \leqq 3$, 被積分関数は $(x+a-b)(x+a-c)$ となる。すなわち

◀ 素直に計算してもよいが, 計算量を減らす工夫をした

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \int_{-3}^{3} (x+a-b)(x+a-c)\,dx \\ &= \int_{-3}^{3} (x^2+(2a-b-c)\,x+(a-b)(a-c))\,dx \\ &= 2\int_{0}^{3} (x^2+(a-b)(a-c))\,dx \\ &= 2\left[\frac{1}{3}x^3+(a-b)(a-c)\,x\right]_0^3 \\ &= 6\,\{3+(a-b)(a-c)\}\end{aligned}$$

(左辺) $=0$ となるのは

◀ ここまでくれば, 整数問題の基本型

$(a-b)(a-c) = -3 \cdots ①$

a, b, c はすべてサイコロの目なので

- $(a-b,\ a-c) = (-3,\ 1)$ のとき
  $(a,\ b,\ c) = (2,\ 5,\ 1),\ (3,\ 6,\ 2)$ の 2 通り
- $(a-b,\ a-c) = (-1,\ 3)$ のとき
  $(a,\ b,\ c) = (4,\ 5,\ 1),\ (5,\ 6,\ 2)$ の 2 通り
- $(a-b,\ a-c) = (1,\ -3)$ のとき
  $(a,\ b,\ c) = (2,\ 1,\ 5),\ (3,\ 2,\ 6)$ の 2 通り
- $(a-b,\ a-c) = (3,\ -1)$ のとき
  $(a,\ b,\ c) = (4,\ 1,\ 5),\ (5,\ 2,\ 6)$ の 2 通り

したがって求める確率は $\dfrac{2+2+2+2}{6^3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{27}}$