

1 p を素数とする。整数 a, b, c が

$$a^3 + pb^3 + p^2c^3 = pabc \cdots \textcircled{*}$$

を満たしている。次の問に答えよ。

ただし、整数 n と自然数 k について、 n^k が素数 p の倍数であるとき、 n 自身が p の倍数であることは証明なしに用いてよい。

- (1) a が p の倍数となることを示せ。
- (2) a, b, c の値の組を決定せよ。

2 集合 \mathbb{N} は自然数全体を表すものとする。

また $[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。

ここで 2 つの正の無理数 α, β は

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \cdots \textcircled{*}$$

を満たすものとし、

集合 A, B は

$$A = \{[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \dots\},$$

$$B = \{[\beta], [2\beta], [3\beta], \dots\}$$

とする。

このとき、

- (1) $A \cap B = \emptyset$ を示せ。
- (2) $A \cup B = \mathbb{N}$ を示せ。