

平板の曲げ

上巻・下巻の目次

原稿 谷本 勉之助

(協) 島根県土質技術研究センター

浜野 浩幹

平板の曲げ

起稿 谷本 勉之助
編集 浜野 浩幹

まえがき

本原稿は故谷本勉之助博士（工学・理学）が起稿されたものである。私が教えを受けていたときに勉強させていただいたが、職場が変わるとき、これを仕上げて本にするようにと全ての原稿をいただいた。しかし、私の不勉強で理解が及ばず今日までそのままにしてしまっていた。退職してやっと、自分の自由な時間ができたので、長年の思いを果たすべく、まとめて見ようと思い立ったものである。

本原稿は式の展開が非常に懇切丁寧に導かれており、また、数値計算はその過程が省略することなしに全て示されている。この展開を丁寧にたどっていくことによって、弾性学の理論および数値解析手法を修得することができる。このわかりやすい論文を埋もれさせるにはまことにもったいないという一念から行った。

記述されている項としては、弾性学の基礎式の解説、板の基本解の誘導、矩形平板、円板の曲げ解析、直行異方性板、板の座屈、弾性床上の板等 16 項目にも上がり、550 頁を超える膨大な原稿である。この根気には驚きを禁じ得ないが、私がこれらをフォローして得た知識は計り知れないものがある。

板の曲げ問題は二次元的な解析であり、はり等の線材と違ってさまざまな制約があって、困難な問題が伴う場合があり、簡単には解けないのが現状である。本文の解説はなるべく原文のままの形を踏襲することを心がけたが、紙面と時間の制約から変更せざるを得ない所も生じた。しかし、これらについても元の原稿を逸脱しないように最大限心がけた。

本論文は浜野のオリジナリティは何もない。解析と数値計算をチェックし、手書きの文章をパソコンで打ち、図を描画したのみである。けれどもこれは極めて大変なことであった。「これを計算して整頓すると次式が得られる」となっている部分などは、はじめの方はその解を導出するのに、4 回や 5 回計算し直すのは当たり前で、途中で何回もやめたい衝動に駆られ、筆者の計算力の無さが思い知らされた。しかし、これも訓練らしく、あるところぐらいから要領を覚え、計算し直す回数も少しずつ少なくなって、計算がそれほど苦痛ではなくなってきたが、解が示されているから出来たようなもので、はじめに解を求め、これが解であると断言できることの緻密さは大変なものであると痛感した。

年月を経ていてコピーした原稿の判読が出来ないところが多々存在した。たとえば、コピーが不鮮明であったり、文字のトナーが前のページの裏に引っ付いてはがれたり、原稿そのものが散逸したページがあったり、あるいは、筆者が参照を繰り返して手垢で見えなくなったりして、その補修には多大の労力を要した。完全に原稿どおりのものになってはいないが、計算のチェックは十分行ったつもりである。

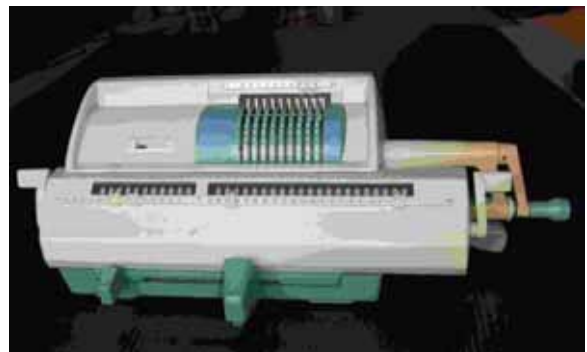
また、本文の全般を通じて、この級数は収束がよい、あるいは収束が悪いという言葉が随所に見られる。この原稿が書かれた時代（昭和 56 年頃）は、今で言う、電卓、もちろん関数電卓等は一切なく、すべて手回し計算器で計算した時代である。したがって、関数の収束の早い遅いは、計算の能率にかかわる最も大切なことで、技術者はこのことを常に頭において計算を行っていた。今でこそ、フーリ

工級数の収束は，計算機での繰り返し計算は自由自在であって，それほど気になることはないが，計算を行うものはこれらのことを熟知した上で，計算すべきものである．

手回し計算機で，3桁から7桁の計算が行われているが，筆者も手元に写真の手回し計算器があるので，これで数値計算を行った．



日本計算器（昭和59年型，筆者が使用したもの）



タイガー計算器

数値計算法は FORTRAN 等のプログラムを組む上では必要欠くべからざるものであり，種々の参考書が出ているが，ここでは次の本を参考にした．また，手回し計算器の本も挙げておく．この本には数値計算のノウハウが随所に出ていて面白い．

谷本 勉之助：実用数値計算法，森北出版株式会社，1961．

谷本 勉之助：数計算と計算器の使い方，金原出版株式会社，1962．

次に，この原稿につけられている序文を記載しておく．谷本先生は工学博士の他に理学博士もお持ちで，数値計算はきわめて堪能であり，また，文章を書くことにも秀でておられた．一般に工学に一流の研究者は，無駄の無いすばらしい文章を書かれる．研究に対する情熱が感じられる名文である．

平成19年1月

浜野 浩幹

序 文

構造物の設計の基本は、応用力学と材料の性質とにある。梁やラーメンの曲げ理論は、この応用力学の中の主題の一つである。したがって青年たちは大学の過程でも相当な程度まで学ぶ仕組みになっていて、かれらが実社会に出てから梁やラーメンについて戸惑わずにすむだけの基礎教養はみにつけている。また独学の青年たちにとっても、入門的なものから高級なものまで、多くの著書があるから、その勉学に不便はない。

近年の構造物は、梁やラーメンの一次元的な曲げ理論だけではしばしば用が足りなくなってきた、橋の床板、門扉、ビルの床、道路飛行場の舗装などをはじめとして、各方面に板構造が用いられている。これらは二次元曲げ理論であって、その基本は一次元の曲げと同じであるが、見かけ上の高級さのために、敬遠されることが多いようである。またわが國の大学教育においても、二次元曲げの基本さえも学生たちに与えられないでいる場合がある。

わが國におけるこのような溝をうめるのに、いくらかでも役立ちたいと考えて執筆したのが本書の第一の目的である。したがって古典的な基本的な事柄を詳説するにとどめ、最新の高級な理論はほとんど含んでいない。また本書でそれらの理論もよく解説することは、筆者の能力と本書のページ数とが許さない。

記述は平明と懇切を主眼とし、数値計算の手順についてもとくに意を用いた。板の曲げについての著書もなかなか多いのに、あえて本書を公刊することにした第二の目的はこの点にある。

しかし浅学の筆者のことゆえ、上の2つの目的にどれだけ沿っているかは残念ながらわからない。だが初めて板の曲げを学ぶ青年たちが、困惑を感ずることの絶対にならないように、筆者の努力を傾けたことだけは、ここに申し添えることが許されるだろうと思う。

読者の忠言に導かれ、筆者ももっとよく勉強して、筆者の一生のうちに本書が書きかえられるようにありたいと願っている。

昭和 36 年 5 月

谷本 勉之助

上 巻 目 次

第 1 章 応力とひずみ

1.1	変位	3
1.2	応力，応力成分	3
1.3	応力の符号	5
1.4	応力の釣合い方程式	5
1.5	$\tau_{xy} = \tau_{yz}$ の証明	6
1.6	要素斜面の応力	7
1.7	ひずみ (strain) の定義	8
1.8	ひずみの物理的意味	9
1.9	変位のベクトル性	10
1.10	応力のテンソル性	12
1.11	主応力 (principal stresses)	14
1.12	応力のモール円	15
1.13	平面極座標	16
1.14	方向微分	18
1.15	ひずみのテンソル性	19
1.16	平面極座標によるひずみ	20
1.17	二階微分演算子のテンソル性	21
1.18	応力ひずみ関係式	22
1.19	$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ の証明	23
1.20	平面応力	23
1.21	平面ひずみ	24
1.22	二次元弾性と相互の変換	25
1.23	ひずみエネルギー	25
1.24	要素線分の伸び	28
1.25	要素 2 線分の角変化	30

第 2 章 平板の曲げの基本式

2.1	平板の曲げ理論の仮定	35
2.2	ひずみとたわみとの関係	35
2.3	たわみと応力成分との関係	37
2.4	他のせん断応力の表現式	37
2.5	合力および合モーメント	38
2.6	せん断力	40
2.7	曲げモーメント，ねじりモーメント，せん断力	40
2.8	曲げモーメントによる最大縁応力	41
2.9	ねじりモーメントによる最大せん断応力	42

2.10	鉛直せん断力による最大せん断応力	42
2.11	モーメント，せん断力の釣合い	43
2.12	平板の微分方程式	45
2.13	微分方程式の変形	45
2.14	境界条件と反力	46
2.15	曲線の境界条件	49

第3章 平板の曲げにおけるベクトルとテンソル

3.1	平板の曲げと曲率	53
3.2	平面曲線の曲率	55
3.3	たわみ曲線の曲率とそのテンソル性	56
3.4	主曲率	57
3.5	曲率のモール円	59
3.6	曲げモーメント，ねじりモーメントのテンソル性	60
3.7	モーメントのモール円	63
3.8	せん断力のベクトル性	65
3.9	平板の曲げにおける Hooke 法則の別の導き方	65

第4章 円形平板の基本式

4.1	平面極座標におけるモーメントの基本式	71
4.2	平面極座標によるたわみの方程式	73
4.3	平面極座標によるひずみ	73
4.4	平面極座標による応力	74
4.5	平面極座標によるせん断力	75
4.6	円形平板の周辺反力	76

第5章 ひずみエネルギーと変分法

5.1	直角座標による平板のひずみエネルギー	79
5.2	円形平板のひずみエネルギー	80
5.3	直交曲線座標による平板のひずみエネルギー	81
5.4	変分法による基本方程式の誘導	82

第6章 単純支持の矩形板を解く Navier の方法

6.1	概説	89
6.2	正弦型の分布荷重を受ける単純支持の矩形板	89
6.3	正弦型の分布荷重を受ける単純支持の矩形板	93
6.4	任意の分布荷重をうける単純支持の矩形板	94
6.5	例題	96
	[例題 1] 満載等分布荷重をうける 4 辺単純支持の矩形板	96
	[例題 2] 中心部に矩形型の等分布荷重が作用する 4 辺単純支持の矩形板	100

[例題 3] 中心に集中荷重が作用する 4 辺単純支持の矩形板	102
[例題 4] 偏心集中荷重が作用する 4 辺単純支持の矩形板	102
6.6 仮想仕事の原理による Navier 解の誘導	103
6.7 エネルギー最小の理論による Navier 解の誘導	105

第 7 章 単純支持の矩形板

7.1 相対する 2 辺が単純支持せられた十分に巾の広い矩形平板 (図 7.1)	109
7.2 4 辺を単純支持せられた矩形平板 (図 7.3)	112
7.3 相対する 2 辺が単純支持で、他の 2 辺が埋込支持の矩形平板 (図 7.4)	120
7.4 4 辺を単純支持せられた静水圧を受ける矩形平板 (図 7.8)	123
7.5 前の節で $b/a < 1$ のとき	132
7.6 細長い矩形板に線集中荷重が作用する解 (図 7.16)	135
7.7 細長い矩形に各種分布荷重が作用する解 (図 7.17)	136
7.8 山形荷重をうける 4 辺単純支持の矩形平板 (図 7.18)	140
7.9 半載等分布荷重を受ける矩形平板 (図 7.19)	141
7.10 上の理論のまとめ ($b > a$ のとき)	143
7.11 例題 (満載当分布荷重)	146
7.12 例題 (半載等分布荷重)	147

下 巻 目 次

第 8 章 厚さの変わる平板

8.1 概 説	3
8.2 たわみの微分方程式	3
8.3 円板のたわみ方程式	4
8.4 曲げ剛さが直線的に変わる矩形平板	5

第 9 章 弾性学的な拠り所

9.1 概 説	13
9.2 Beltrami の方程式	13
9.3 弾性学的な拠り所	14
9.4 モーメント	17
9.5 精密解について	17

第 10 章 平板の振動

10.1 平板の自由振動の方程式	21
10.2 矩形版の自由振動 (単純支持)	22
10.3 ベッセル関数	23
10.4 円板の自由振動	27

第 11 章 直交異方性の平板

11.1 概 説	31
11.2 Hooke の法則	31
11.3 Hooke の法則	32
11.4 たわみの微分方程式	33
11.5 単純支持の矩形版 (Navier の法)	33
11.6 直線状の分布荷重	34
11.7 指数方程式について	36
11.8 集中荷重の作用するとき	38
11.9 極異方性板の基本方程式	40

第 12 章 回転対称の円板

12.1 概 説	45
12.2 回転対称の荷重を受ける円板の基本式	45
12.3 微分方程式の一般解	46
12.4 等分布荷重を受ける埋め込み支持の円板	48
12.5 一様な曲げモーメントを受ける円板	50
12.6 等分布荷重を受ける単純支持の円板	51

12.7	モーメントを受ける円孔のある円板	53
12.8	内周でモーメントを受ける埋込支持の円板	55
12.9	内周でせん断力を受ける単純支持の円板	56
12.10	内周でせん断力を受ける埋込支持の円板	58
12.11	等分布荷重を受ける中空円板（単純支持）	60
12.12	等分布荷重を受ける中空円板（埋込支持）	61
12.12	内周が単純支持で等分布荷重を受ける中空円板	61
12.14	内周が埋込支持で等分布荷重を受ける中空円板	63
12.15	同心円の環荷重を受ける円板（単純支持）	64
12.16	同心円の環荷重を受ける円板（埋込支持）	66
12.17	同心円内に等分布荷重を受ける円板（単純支持）	67
12.18	同心円内に等分布荷重を受ける円板（埋込支持）	69
12.19	中心に集中荷重を受ける円板	71
12.20	任意の分布荷重を受ける円板	73

第 13 章 非対称の円板

13.1	概 説	79
13.2	円板のたわみの一般解	79
13.3	静水圧を受ける円板（単純支持）	81
13.4	静水圧を受ける円板（埋込支持）	85
13.5	煙突の基礎の問題	86
13.6	中心でモーメントを受ける単純支持の円板	88
13.7	中心でモーメントを受ける埋込支持の円板	89
13.8	中心に剛円板があるときの単純支持の円板	90
13.9	中心に剛円板があるときの埋込支持の円板	91
13.10	偏心集中荷重を受ける円板（埋込支持）	92
13.11	相反作用法による解法	96
13.12	偏心集中荷重を受ける同心円孔のある円板	99
13.13	内周が自由端の同心円孔のある円板	102
付録	ラプラス演算子の極座標への変換の計算	105

第 14 章 平板の曲げの弾性学的考察

14.1	概 説	109
14.2	円柱座標による応力方程式	109
14.3	円柱座標によるひずみ成分	110
14.4	回転対称体系の変位方程式	111
14.5	回転対称系の応力関数	112
14.6	多項式の周調和関数	113
14.7	前節による応力成分	114

14.8	純粋曲げ	114
14.9	等分布荷重を受ける円板（単純支持）	116
14.10	矩形板の場合についての注意	118
14.11	任意の分布荷重を受ける無限平板	119

第 15 章 平板の座屈

15.1	概 説	123
15.2	内力の微分方程式	123
15.3	たわみの微分方程式	124
15.4	円形平板のたわみの微分方程式	125
15.5	横荷重のある単純支持の矩形板	126
15.6	有限ひずみ	127
15.7	横荷重もあるときのひずみエネルギー	129
15.8	縦，横荷重を受ける単純支持の矩形平板	131
15.9	2 辺が単純支持で，他の 2 辺が別の支持条件の矩形平板の座屈	133
15.10	4 辺が埋込支持の矩形平板	137
15.11	一様な圧縮荷重を受ける円板の座屈	138
15.12	中空円板の座屈の方程式	141
15.13	微分方程式(15.69)の特別解	143
15.14	中空円板の例	144

第 16 章 弾性基礎上の平板

16.1	概 説	149
16.2	中心に集中荷重を受ける円板	149
16.3	仮想変位による近似解法	154
16.4	ベッセル関数の利用	156
16.5	弾性基礎上の無限平板に集中荷重の作用する場合	158
16.6	弾性基礎上の平板の境界条件	159
16.7	基礎弾性率 (k) の値	160
16.8	基礎弾性率を仮定しないときの問題の扱い方	160
16.9	半無限体の表面沈下	161
16.10	偏心集中荷重を受ける弾性床上の円板	162