モールのひずみ円とひずみロゼット

1.　モールのひずみ円

一点におけるひずみ成分 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ が求められているとき, その点における**縦ひずみ** ε_ϕ および**せん断ひずみ** γ_ϕ は応力式 [1)] の $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を対応するひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ に置き換えることによって次のように得られる.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\phi &= \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\phi-\frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\phi \\ \frac{1}{2}\gamma_\phi &= \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\sin 2\phi+\frac{1}{2}\gamma_{xy}\cos 2\phi \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式(1)で γ_{xy} を 0 とおくと

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\phi &= \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\phi \\ \frac{1}{2}\gamma_\phi &= \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\sin 2\phi \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

これより ϕ を消去すると

$$\left(\varepsilon_\phi-\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\gamma_\phi\right)^2=\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2 \tag{3}$$

が得られる．この式は，横軸に縦ひずみ ε，縦軸にせん断ひずみの半分 $\gamma/2$ をとると

$$\text{中心}\left(\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}, 0\right), \qquad \text{半径}\ \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}$$

の円の方程式である．この円を**モールのひずみ円**という.

せん断ひずみ γ_ϕ が 0 となる方向は，式(1)の第 2 式より

$$\tan 2\phi = -\frac{\gamma_{xy}/2}{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)/2} \tag{4}$$

で与えられ, これらの方向の縦ひずみを**主ひずみ**という. 主ひずみを特に $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ で表せば次のようになる.

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2\end{aligned}\right\} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2} \tag{5}$$

最大せん断ひずみは

$$\frac{1}{2}\gamma_{\max} = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2} \tag{6}$$

で与えられ，また式(5)から次式が得られる.

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2 = \varepsilon_x+\varepsilon_y \tag{7}$$

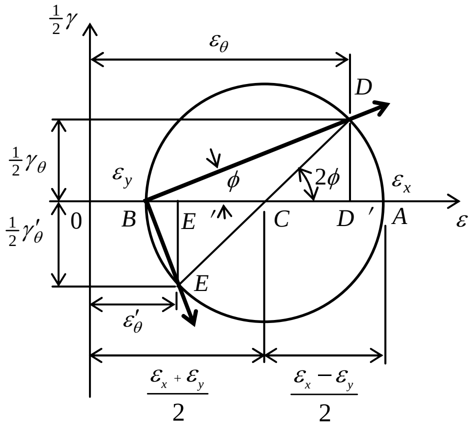

図 1　モールのひずみ円

1) 浜野 浩幹：構造力学問題集，p.68，式(4.26).

2.　ひずみロゼット

ひずみゲージによる測定では，ひずみゲージの方向の値すなわち縦ひずみ ε_ϕ が計測される．したがって次式

$$\varepsilon_\phi = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\phi - \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\phi \tag{8}$$

の右辺における未知数 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ を知るためには 3 方向のひずみを測定する必要がある．すなわち，*a*,*b*,*c* 方向のひずみを測定して次の連立方程式を解けばよい．

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_a &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\phi_a - \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\phi_a \\
\varepsilon_b &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\phi_b - \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\phi_b \\
\varepsilon_c &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\phi_c - \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\phi_c
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

最も簡単なものが図 2 のような場合である．すなわち

$$\phi_a = 0,\ \phi_b = 45^\circ,\ \phi_c = 90^\circ$$

の方向を測定すれば

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a,\ \varepsilon_y = \varepsilon_c,\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c) \tag{10}$$

として求められる．

このように，いくつかの方向のひずみ量からひずみ成分を求める方法を**ひずみロゼット法**という．

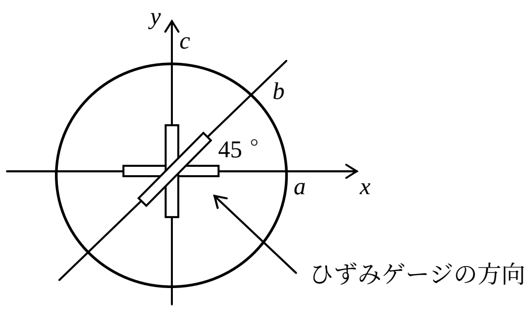

図 2　ひずみロゼット

したがって，主ひずみは

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2\end{matrix}\right\} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(\varepsilon_a - \varepsilon_b\right)^2 + \left(\varepsilon_b - \varepsilon_c\right)^2} \tag{11}$$

その方向は，それぞれ

$$\tan 2\phi_{1,2} = -\frac{2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)}{\varepsilon_a - \varepsilon_c} \tag{12}$$

通常，ε_1 を最大ひずみ（$=\varepsilon_{\max}$），ε_2 を最小ひずみ（$=\varepsilon_{\min}$）と呼ぶ．また，最大ひずみ ε_1 の方向 ϕ_1 は

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_c - \varepsilon_x < 0 &\ \rightarrow\ \phi_1 = \phi_1 \\
\varepsilon_c - \varepsilon_x > 0 &\ \rightarrow\ \phi_1 = \phi_1 + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

である．

これらを応力―ひずみ関係式に代入すればその点の応力が求められる．

応力関係式：ひずみ成分が求まれば，次式から応力を求めることができる．

(1)　最大主応力

$$\sigma_{\max} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \tag{14}$$

(2)　最小主応力

$$\sigma_{\min} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \tag{15}$$

(3)　最大せん断応力

$$\tau_{\max} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{\max} \tag{16}$$

ここに，最大せん断ひずみ$\gamma_{\max}$は次式で与えられる．

$$\gamma_{\max} = \sqrt{2}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2} \tag{17}$$

注）応力－ひずみ関係式

平面応力の場合：$\sigma_z = 0,\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y),\quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x),\quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \tag{18}$$

平面ひずみの場合：$\varepsilon_z = 0,\quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y),\quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

$$\sigma_x = \lambda e + 2\mu\varepsilon_x,\quad \sigma_y = \lambda e + 2\mu\varepsilon_y,\quad \sigma_z = \lambda e + 2\mu\varepsilon_z \tag{19}$$

ただし

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad \text{(体積ひずみ)},\qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},\ \mu = G \quad \text{（ラメの定数）} \tag{20}$$

浜 野　浩 幹
（060605）