付録A　マコーレー法によるはりのたわみ

はりのたわみの計算にはいろいろな方法があるが，ここでは，**マコーレーの方法**によってはりのたわみを求めてみる．

A.1　マコーレーのカッコ（Maculey’s Bracket <　>）

［**定義**］次の関係式で表されるカッコ（< >）を**マコーレーのカッコ**という．

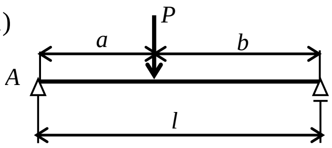
$$< x-a >^n = \begin{cases} (x-a)^n & \cdots\ x > a \\ 0 & \cdots\ x \le a \end{cases} \tag{A.1}$$

マコーレーのカッコを使用すると集中荷重，等分布荷重，部分分布荷重等が作用するはりのせん断力，曲げモーメントを一本の式で表すことができる．したがって，連続条件が要求されるはりの弾性曲線（たわみ曲線、たわみ角曲線）を求める場合に便利である．

A.2　マコーレーのカッコによるせん断力，曲げモーメントの表示

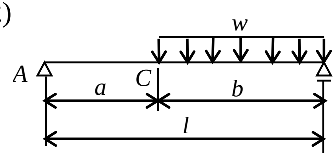
［**例題 1**］　次の梁のせん断力，曲げモーメントをマコーレーのカッコを用いて表せ．

(1)



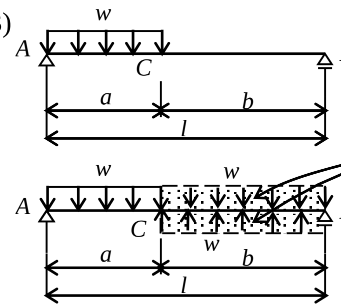
$$Q_x = R_A - P < x-a >^0$$
$$M_x = R_A x - P < x-a > \tag{A.2}$$

(2)



$$Q_x = R_A - w < x-a >$$
$$M_x = R_A x - \frac{w}{2} < x-a >^2 \tag{A.3}$$

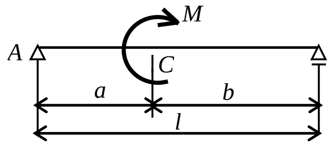
(3)



AC 間に等分布荷重が作用している場合は，はり全体，すなわち *CB* まで荷重を延長する．そしてこの延長した荷重を打ち消すように，下から上向きに同じ荷重を作用させる．
すなわち，この範囲($b<x<l$)は上下に相対的に *w* が作用し，打ち消しあって 0 となると考える．

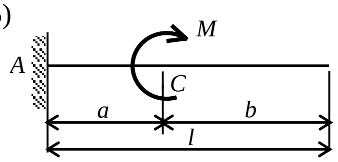
$$Q_x = R_A - wx + w < x-a >$$
$$M_x = R_A x - \frac{w}{2} x^2 + \frac{w}{2} < x-a >^2 \tag{A.4}$$

(4)

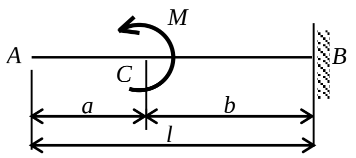


$$Q_x = R_A$$
$$M_x = R_A x + M < x-a >^0 \tag{A.5}$$

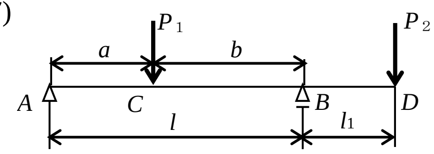
(5)



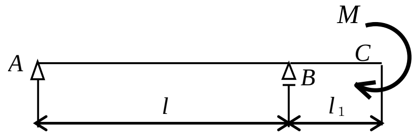
$$Q_x = 0$$
$$M_x = M_A + M < x-a >^0 \tag{A.6}$$

(6)


$$Q_x = 0$$
$$M_x = -M < x-a >^0 \tag{A.7}$$

(7)


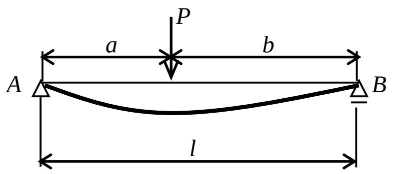
$$Q_x = R_A - P_1 < x-a >^0 + R_B < x-l >^0$$
$$M_x = R_A x - P_1 < x-a > + R_B < x-l > \tag{A.8}$$

(8)


$$Q_x = R_A + R_B < x-l >^0$$
$$M_x = R_A x + R_B < x-l > \tag{A.9}$$

A.3　たわみ，たわみ角の計算

［**例題 2**］次のはりのたわみ曲線、たわみ角曲線をマコーレー法を用いて求めよ.



［**解**］曲げモーメントは、

$$M_x = R_A x - P < x-a >, \qquad R_A = \frac{Pb}{l}$$

これをはりの弾性曲線の微分方程式に適用する。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{1}{EI}(R_A x - P < x-a >),$$

これを 2 回積分すると

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}R_A x^2 - \frac{P}{2} < x-a >^2\right) + C_1$$

$$y = -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}R_A x^3 - \frac{P}{6} < x-a >^3\right) + C_1 x + C_2$$

これらの式に境界条件を導入する。

$x = 0$ で　$y = 0$　より　　　$C_2 = 0$

$x = l$　で　$y = 0$　より

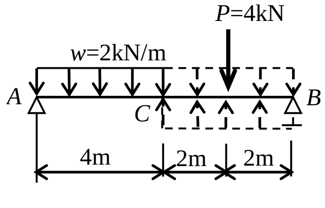
$$C_1 l = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}\frac{Pb}{l}l^3 - \frac{Pb^3}{6}\right) = \frac{Pab(l+b)}{6EI} \qquad \therefore C_1 = \frac{Pa(l+b)}{6EIl}$$

したがって、たわみ角、たわみ角曲線は次のように表される。

$$\theta = -\frac{1}{EI}\left(\frac{Pb}{2l}x^2 - \frac{P}{2} < x-a >^2\right) + \frac{Pa(l+b)}{6EIl}$$

$$y = -\frac{1}{EI}\left(\frac{Pb}{6l}x^3 - \frac{P}{6} < x-a >^3\right) + \frac{Pa(l+b)}{6EIl}x$$

［**例題 3**］次のはりのたわみ曲線、たわみ角曲線をマコーレー法を用いて求めよ。



［**解**］曲げモーメントは

$$M_x = R_A x - \frac{w}{2}x^2 + \frac{w}{2} < x-4 >^2 - P < x-6 >$$

この式において　$x = 8\,\mathrm{m}$ のとき $M_B = 0$ とおくと

$$\therefore R_A = 7\,\mathrm{kN}$$

弾性曲線の微分方程式より

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{1}{EI}\left[7x - x^2 + \langle x-4 \rangle^2 - 4\langle x-6 \rangle\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI}\left[\frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}\langle x-4 \rangle^3 - 2\langle x-6 \rangle^2\right] + C_1$$

$$y = -\frac{1}{EI}\left[\frac{7}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{12}\langle x-4 \rangle^4 - \frac{4}{6}\langle x-6 \rangle^3\right] + C_1x + C_2$$

これらの式に境界条件を導入する。

$x = 0$ で　$y = 0$ より　$C_2 = 0$　　　　$x = 8\text{m}$ で　$y = 0$　より　　$C_1 = \dfrac{34}{EI}$

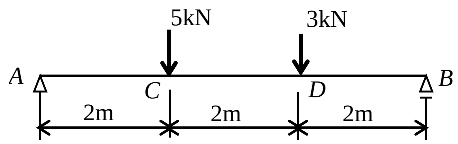
したがって

$$\theta = -\frac{1}{EI}\left[\frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}\langle x-4 \rangle^3 - 2\langle x-6 \rangle^2 - 34\right]$$

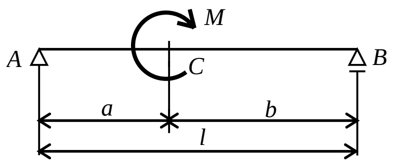
$$y = -\frac{1}{EI}\left[\frac{7}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{12}\langle x-4 \rangle^4 - \frac{2}{3}\langle x-6 \rangle^3 - 34x\right]$$

［問題 1］ 次の各はりのたわみ角，たわみ曲線をマコーレーのカッコを用いて求めよ．

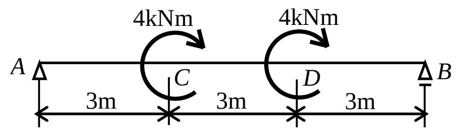
(1)



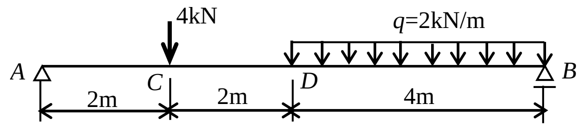
(2)



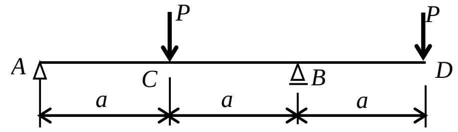
(3)



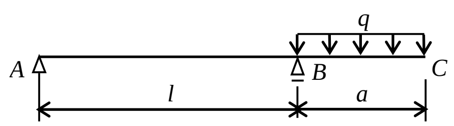
(4)



(5)

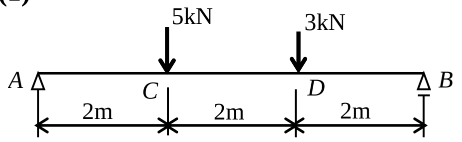


(6)



［問題 1 解答］

(1)



［解］せん断力，曲げモーメントは

$$Q_x = R_A - 5 < x-2 >^0 - 3 < x-4 >^0$$

$$M_x = R_A x - 5 < x-2 > - 3 < x-4 >$$

$x = 6$ m において M=0 より $R_A = \frac{13}{3}$

弾性曲線の微分方程式より

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{1}{EI}\left[\frac{13}{3}x - 5 < x-2 > - 3 < x-4 >\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI}\left[\frac{13}{6}x^2 - \frac{5}{2} < x-2 >^2 - \frac{3}{2} < x-4 >^2 + C_1\right]$$

$$y = -\frac{1}{EI}\left[\frac{13}{18}x^3 - \frac{5}{6} < x-2 >^3 - \frac{3}{6} < x-4 >^3 + C_1 x + C_2\right]$$

境界条件より

$$x = 0 : y = 0 \to C_2 = 0, \quad x = 6 : y = 0 \to C_1 = -\frac{148}{9}$$

ゆえに

$$\theta = -\frac{1}{EI}\left[\frac{13}{6}x^2 - \frac{5}{2} < x-2 >^2 - \frac{3}{2} < x-4 >^2 - \frac{148}{9}\right]$$

$$y = -\frac{1}{EI}\left[\frac{13}{18}x - \frac{5}{6} < x-2 >^3 - \frac{3}{6} < x-4 >^3 - \frac{148}{9}x\right]$$

各点の値は

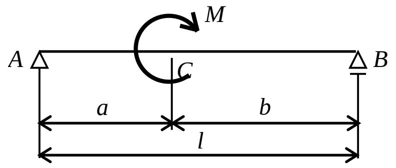
$$x = 0:\ \theta_A = \frac{148}{9EI},\ y_A = 0$$

$$x = 2\text{m}:\ \theta_C = \frac{70}{9EI},\ y_C = \frac{244}{9EI}$$

$$x = 4\text{m}:\ \theta_D = -\frac{74}{9EI},\ y_D = \frac{236}{9EI}$$

$$x = 6\text{m}:\ \theta_B = -\frac{140}{9EI},\ y_B = 0$$

(2)



［解］せん断力，曲げモーメントは

$$Q_x = R_A$$

$$M_x = R_A x + M < x-a >^0$$

$x = l$ において M=0 より $R_A = -\frac{M}{l}$

弾性曲線の微分方程式より

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\frac{M}{l}x - M < x-a >^0\right], \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left[\frac{M}{2l}x^2 - M < x-a > + C_1\right]$$

$$y = \frac{1}{EI}\left[\frac{M}{6l}x^3 - \frac{M}{2} < x-a >^2 + C_1 x + C_2\right]$$

境界条件より $x = 0 : y = 0 \to C_2 = 0, \quad x = l : y = 0 \to C_1 = -\frac{M(l^2 - 3b^2)}{6l}$

ゆえに

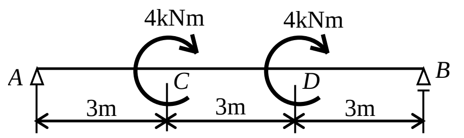
$$\theta = \frac{M}{EI}\left[\frac{1}{2l}x^2 - < x-a > - \frac{(l^2 - 3b^2)}{6l}\right], \quad y = \frac{M}{EI}\left[\frac{1}{6l}x^3 - \frac{1}{2} < x-a >^2 - \frac{(l^2 - 3b^2)}{6l}x\right]$$

各点の値は

$$x = a:\ \theta_C = \frac{M(3a^2 + 3b^2 - l^2)}{6EIl},\ y_C = \frac{Ma(a^2 + 3b^2 - l^2)}{6EIl}$$

$$x = 0:\ \theta_A = -\frac{M(l^2 - 3b^2)}{6EIl},\ x = l:\ \theta_B = \frac{M(2l^2 - 6bl + 3b^2)}{6EIl}$$

(3)



［解］せん断力，曲げモーメントは

$$Q_x = R_A$$

$$M_x = R_A x + 4 < x-3 >^0 + 4 < x-6 >^0$$

$x = 9\mathrm{m}$ において M=0 より $R_A = -\dfrac{8}{9}$

弾性曲線の微分方程式より

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\frac{8}{9}x - 4 < x-3 >^0 - 4 < x-6 >^0\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left[\frac{4}{9}x^2 - 4 < x-3 > - 4 < x-6 > + C_1\right]$$

$$y = \frac{1}{EI}\left[\frac{4}{27}x^3 - 2 < x-3 >^2 - 2 < x-6 >^2 + C_1 x + C_2\right]$$

境界条件より

$$x = 0 : y = 0 \to C_2 = 0, \quad x = 9\mathrm{m} : y = 0 \to C_1 = -2$$

ゆえに

$$\theta = \frac{1}{EI}\left[\frac{4}{9}x^2 - 4 < x-3 > - 4 < x-6 > - 2\right]$$

$$y = \frac{1}{EI}\left[\frac{4}{27}x^3 - 2 < x-3 >^2 - 2 < x-6 >^2 - 2x\right]$$

各点の値は

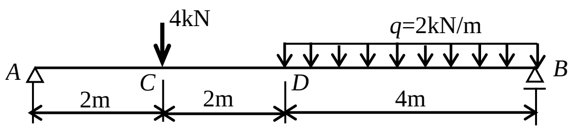
$x = 0$:　$\theta_A = -2/EI$

$x = 3\mathrm{m}$:　$\theta_C = 2/EI$,　$y_C = -2/EI$

$x = 6\mathrm{m}$:　$\theta_D = 2/EI$,　$y_D = 2/EI$

$x = 9\mathrm{m}$:　$\theta_A = -2/EI$

(4)



［解］せん断力，曲げモーメントは

$$Q_x = R_A - 4 < x-4 >^0 - 2 < x-4 >$$

$$M_x = R_A x - 4 < x-2 > - 2 < x-4 > \frac{< x-4 >}{2}$$

$$= R_A x - 4 < x-2 > - < x-4 >^2$$

$x = 8\ \mathrm{m}$ において M=0 より $R_A = 5\mathrm{kN}$

弾性曲線の微分方程式より

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{1}{EI}\left[5x - 4 < x-2 > - < x-4 >^2\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI}\left[\frac{5}{2}x^2 - 2 < x-2 >^2 - \frac{1}{3} < x-4 >^3 + C_1\right]$$

$$y = -\frac{1}{EI}\left[\frac{5}{6}x^3 - \frac{2}{3} < x-2 >^3 - \frac{1}{12} < x-4 >^4 + C_1 x + C_2\right]$$

境界条件より

$$x = 0 : y = 0 \to C_2 = 0, \quad x = 8 :\ y = 0 \to C_1 = -\frac{98}{3}$$

ゆえに

$$\theta = -\frac{1}{EI}\left[\frac{5}{2}x^2 - 2 < x-2 >^2 - \frac{1}{3} < x-4 >^3 - \frac{98}{3}\right]$$

$$y = -\frac{1}{EI}\left[\frac{5}{6}x^3 - \frac{2}{3} < x-2 >^3 - \frac{1}{12} < x-4 >^4 - \frac{98}{3}x\right]$$

各点の値は

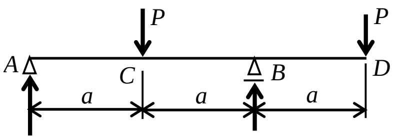
$x = 0$:　$\theta_A = \dfrac{98}{3EI}$,　$y_A = 0$

$x = 2\mathrm{m}$:　$\theta_C = \dfrac{68}{3EI}$,　$y_C = \dfrac{176}{3EI}$

$x = 4\mathrm{m}$:　$\theta_D = \dfrac{2}{3EI}$,　$y_D = \dfrac{248}{3EI}$

$x = 8\mathrm{m}$:　$\theta_B = -\dfrac{102}{3EI}$,　$y_B = 0$

(5)



［解］せん断力，曲げモーメントは

$$Q_x = R_A - P < x-a >^0 + R_B < x-2a >^0$$

$$M_x = R_A x - P < x-a > + R_B < x-2a >$$

$x=2a$ において $\sum M_B = 0$ より $R_A = 0.\quad \therefore R_B = 2P$

弾性曲線の微分方程式より

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = \frac{1}{EI}\left[P < x-a > -2P < x-2a >\right],\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left[\frac{P}{2} < x-a >^2 - P < x-2a >^2 + C_1\right]$$

$$y = \frac{1}{EI}\left[\frac{P}{6} < x-a >^3 - \frac{P}{3} < x-2a >^3 + C_1 x + C_2\right]$$

境界条件より

$$x=0: y=0 \rightarrow C_2 = 0,\quad x=2a: y=0 \rightarrow C_1 = -\frac{Pa^2}{12}$$

ゆえに

$$\theta = \frac{1}{EI}\left[\frac{P}{2} < x-a >^2 - P < x-2a >^2 - \frac{Pa^2}{12}\right]$$

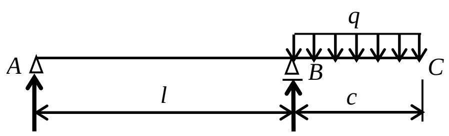
$$y = \frac{1}{EI}\left[\frac{P}{6} < x-a >^3 - \frac{P}{3} < x-2a >^3 - \frac{Pa^2}{12}x\right]$$

各点の値は

$$x=a:\quad \theta_C = -\frac{Pa^2}{12EI},\quad y_C = -\frac{Pa^3}{12EI}$$

$$x=3a:\quad \theta_D = \frac{11Pa^2}{12EI},\quad y_D = \frac{3Pa^3}{4EI}$$

(6)



［解］反力は

$$R_A = -\frac{qc^2}{2l},\quad R_B = \frac{qc}{l}\left(l + \frac{c}{2}\right)$$

せん断力，曲げモーメントは

$$Q_x = R_A + R_B < x-l >^0 - q < x-l >$$

$$M_x = R_A x + R_B < x-l > - \frac{q}{2} < x-l >^2$$

弾性曲線の微分方程式より

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{1}{EI}\left[R_A x + R_B < x-l > - \frac{q}{2} < x-l >^2\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI}\left[\frac{R_A}{2}x^2 + \frac{R_B}{2} < x-l >^2 - \frac{q}{6} < x-l >^3 + C_1\right]$$

$$y = -\frac{1}{EI}\left[\frac{R_A}{6}x^3 + \frac{R_B}{6} < x-l >^3 - \frac{q}{24} < x-l >^4 + C_1 x + C_2\right]$$

境界条件より

$$x=0: y=0 \rightarrow C_2 = 0,\quad x=l: y=0 \rightarrow C_1 = \frac{qc^2 l}{12}$$

ゆえに

$$\theta = -\frac{1}{EI}\left[\frac{R_A}{2}x^2 + \frac{R_B}{2} < x-l >^2 - \frac{q}{6} < x-l >^3 + \frac{qc^2 l}{12}\right]$$

$$y = -\frac{1}{EI}\left[\frac{R_A}{6}x^3 + \frac{R_B}{6} < x-l >^3 - \frac{q}{24} < x-l >^4 + \frac{qc^2 l}{12}x\right]$$