

9 はりの応力度

9.1 はりの応力度

はりには荷重によって N, Q, M の3種類の断面力が発生し、それに対応して垂直応力度、せん断応力度、曲げ応力度が生じる。

9.2 曲げ応力度

次の仮定を設ける。

はりの断面は鉛直対称軸を持ち、外力はすべてこの対称軸を含む面内に働く場合を取り扱う。曲げモーメントのみの作用（純粋曲げ）によってはりに生じる応力を曲げ応力という。
はりの断面は荷重を受けて変形した後も平面を保つと仮定する（Bernoulli-Eulerの仮定）。

はりには曲げモーメントによって上側は圧縮、下側は引張りを受ける。この圧縮と引張りの境界を**中立軸**という。はりの長さ方向の微小区間 dx を考え、これに曲げモーメントが作用すると図(a)の破線のようになる。

中立軸から y の点の伸び量は $dx \cdot \varepsilon$ であり、三角形の比例関係から

$$\frac{\rho}{dx/2} = \frac{y}{dx \cdot \varepsilon / 2}, \quad \therefore \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon}{y} \tag{9.1}$$

また、この点の応力度は

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E}{\rho} y \tag{9.2}$$

いま、 y 点におけるはりの断面方向の微小断面積 dA に応力 σ が作用しているとすると、これを全断面について合成したものは軸力に釣合わなければならない。今の場合、軸力は0であるから $\sum H = 0$ より

$$\int \sigma dA = 0, \quad \text{したがって} \quad \int y dA = 0 \tag{9.3}$$

この式は断面1次モーメントが0ということであるから、図心の定義より、**中立軸は図心を連ねた線**となる。

また、 $\sum M = M$ より

$$\int (\sigma dA) y = M, \quad \text{したがって} \quad \int \frac{E}{\rho} y dA y = \frac{E}{\rho} \int y^2 dA = \frac{E}{\rho} I = M, \quad \therefore \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{9.4}$$

式(9.2),(9.4)より次の**曲げ応力度**の式が得られる。

$$\sigma = \frac{M}{I} y \tag{9.5}$$

ここに、 y は中立軸からの距離であり、負の場合は圧縮応力度となる。また、 σ の最大値は中立軸から最も遠い所において生じる。これを**縁応力度**とよび次のように得られる。

$$\sigma_{1,2} = \pm \frac{M}{I} y_{1,2} = \pm \frac{M}{W_{1,2}} \tag{9.6}$$

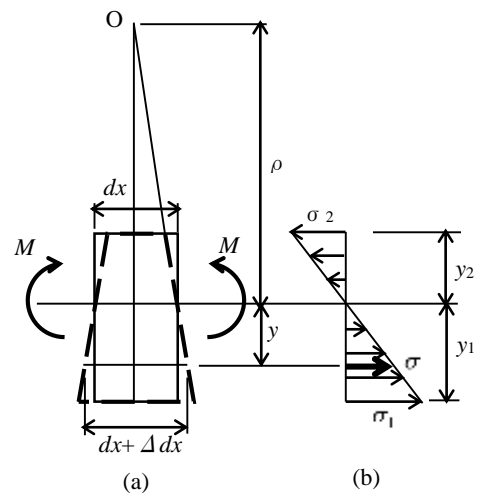


図 9.1 曲げ応力度

[例題 9.1] 次の I 形断面に曲げモーメント $M=80\text{kNm}$ が作用するときの縁応力度およびフランジとウェブの接合部の応力度を求めよ。

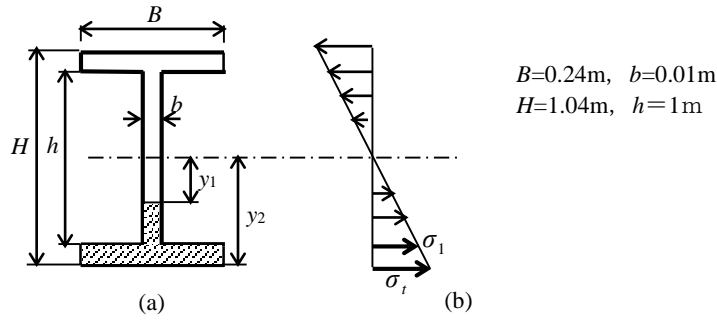


図 9.2

[解]

$$I = \frac{BH^3}{12} - \frac{(B-b)h^3}{12} = \frac{0.24 \times 1.04^3}{12} - \frac{0.23 \times 1.0^3}{12} = 3.33 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$\sigma_1 = \frac{M}{I} y = \frac{80\,000}{3.33 \times 10^{-3}} \times 0.5 = 1.2 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma_t = \frac{M}{I} y = \frac{80\,000}{3.33 \times 10^{-3}} \times 0.52 = 1.25 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

[問題 9.1] 次の各断面に曲げモーメント $M=1\text{kNm}$ が作用するときの縁応力度を求めよ。

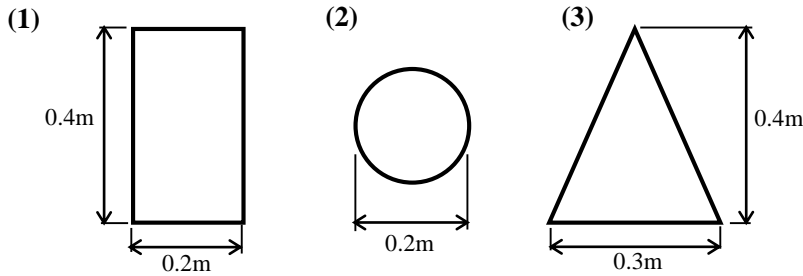


図 9.3

[問題 9.2] 次の T 形断面のはりの縁応力度を求めよ。ただし、 $M=200\text{Nm}$ とする。

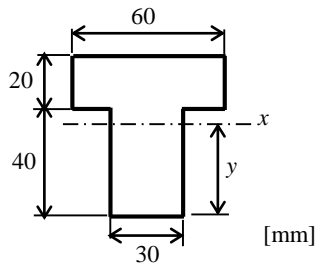


図 9.4

9.3 せん断応力度

次図のようなはりの微小区間 dx と中立軸からの距離 y_1 によって切り取られる微小要素の水平方向の釣合いを調べる (図(c)).

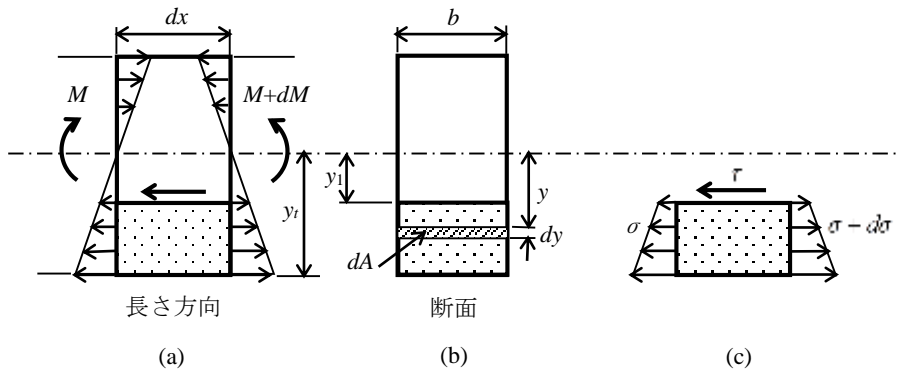


図 9.5 せん断応力度

要素の左側, 右側の曲げ応力はそれぞれ $\sigma = \frac{M}{I} y$, $\sigma + d\sigma = \frac{M + dM}{I} y$ であるから, 応力の増分量は

$$d\sigma = \frac{dM}{I} y$$

これは要素の上面に作用する水平せん断力 $\tau dx \cdot b$ と釣合わなければならない. すなわち

$$\tau b dx = \int_{y_1}^{y_2} d\sigma dA = \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{dM}{I} y \right) dA = \frac{dM}{I} \int_{y_1}^{y_2} y dA$$

ゆえに

$$\tau = \frac{QG}{Ib}, \quad \text{ここに} \quad G = \int_{y_1}^{y_2} y dA, \quad \frac{dM}{dx} = Q \tag{9.7}$$

また, G は求めようとする点より外側の中立軸に対する断面 1 次モーメントである.

【例題 9.2】 矩形断面の中立軸より y_1 の点のせん断応力を求めよ.

【解】

$$G = \int_{y_1}^{y_2} y dA = \int_{y_1}^{h/2} y b dy = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right), \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

$$\therefore \tau = \frac{QG}{Ib} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left\{ 1 - \left(\frac{y_1}{h/2} \right)^2 \right\}$$

この式は y_1 の 2 乗で表されており, 放物線となる. その最大値は $y_1 = 0$, すなわち中立軸で生じる.

$$\therefore \tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = 1.5 \frac{Q}{A}$$

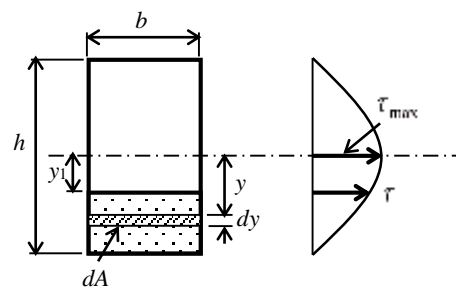


図 9.6 矩形断面のせん断応力度

[例題 9.3] I 形断面のせん断応力度を求めよ.

[解]

(1) フランジ部分

$$G_2 = B \left(\frac{H}{2} - y_2 \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{H}{2} + y_2 \right) = \frac{B}{2} \left(\frac{H^2}{4} - y_2^2 \right)$$

$$\tau_2 = \frac{QG_2}{Ib} = \frac{Q}{IB} \frac{B}{2} \left(\frac{H^2}{4} - y_2^2 \right)$$

上式において

$$y_2 = \frac{H}{2} : \tau_2 = 0$$

$$y_2 = \frac{h}{2} : \tau_{2max} = \frac{Q}{IB} \frac{B}{2} \left(\frac{H^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right) = \frac{Q}{IB} \frac{B}{8} (H^2 - h^2)$$

(2) ウェブ部分

$$G_1 = B \left(\frac{H}{2} - \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{H}{2} + \frac{h}{2} \right) + b \left(\frac{h}{2} - y_1 \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y_1 \right) = \frac{B}{2} \left(\frac{H^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right) + \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

$$\tau_1 = \frac{QG_1}{Ib} = \frac{Q}{Ib} \left\{ \frac{B}{2} \left(\frac{H^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right) + \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \right\}$$

上式において

$$y_1 = 0 : \tau_{1max} = \frac{Q}{Ib} \left\{ \frac{B}{2} \left(\frac{H^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right) + \frac{bh^2}{8} \right\}$$

$$y_1 = \frac{h}{2} : \tau_{1min} = \frac{Q}{Ib} \frac{B}{8} (H^2 - h^2)$$

フランジとウェブの境界でせん断応力 τ は不連続的に変化する. その比は

$$\frac{\tau_{1min}}{\tau_{2max}} = \frac{\frac{Q}{Ib} \frac{B}{8} (H^2 - h^2)}{\frac{Q}{Ib} \frac{B}{8} (H^2 - h^2)} = \frac{B}{b}$$

すなわち, フランジとウェブの厚さの比となる.

[問題 9.3] 次の断面のせん断応力度の分布図を描け. ただし, $Q=2\text{kN}$ とする.

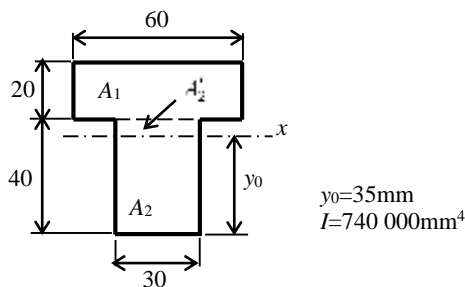


図 9.8

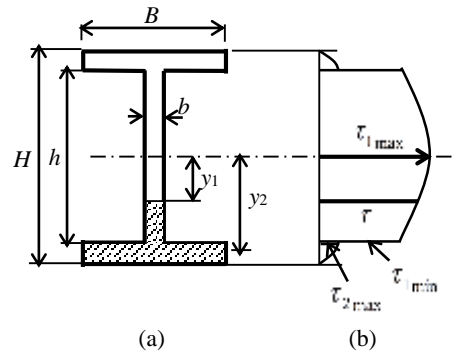


図 9.7

[例題 9.4] 次図(d)の要素 1 から要素 5 の曲げ応力度, せん断応力度を求めよ.

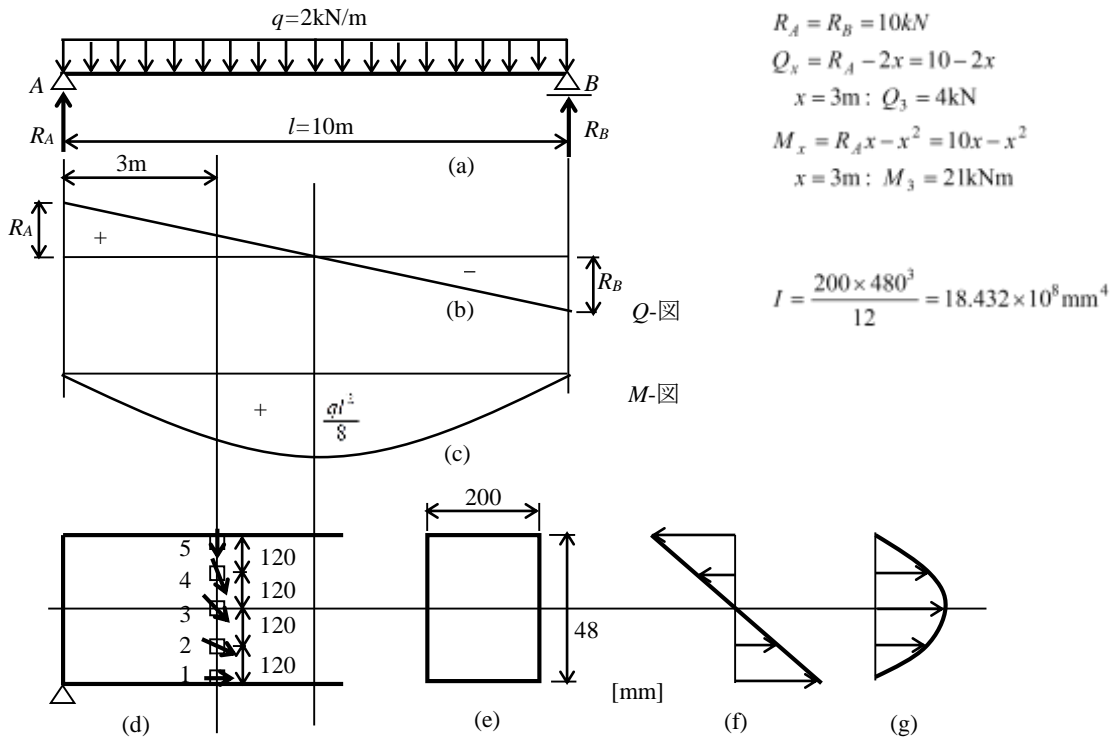


図 9.9

図(d)の各微小要素に示す矢印は次頁例題 9.5 より求めた主応力 σ_1 の方向を示す. ただし, 要素 5 の σ_1 は 0 であるが, 方向を示すために記したものである.

[解]

はりの場合 $\sigma_y = 0$ とみなす.

要素 1 : $\sigma_x = \frac{M}{I} y = \frac{21\,000\,000}{18.432 \times 10^8} \times 240 = 2.73 \text{N/mm}^2$

$\tau_{xy} = 0$

要素 2 : $\sigma_x = \frac{M}{I} y = \frac{21\,000\,000}{18.432 \times 10^8} \times 120 = 1.37 \text{N/mm}^2$

$G = 200 \times 120 \times 180 = 4.32 \times 10^6 \text{cm}^3$

$\tau_{xy} = \frac{QG}{bl} = \frac{4\,000 \times 4.32 \times 10^6}{200 \times 18.432 \times 10^8} = 4.69 \times 10^{-2} \text{N/m}^2$

要素 3 : $\sigma_x = \frac{M}{I} y = \frac{21\,000\,000}{18.432 \times 10^8} \times 0 = 0 \text{N/mm}^2$

$G = 200 \times 240 \times 120 = 5.76 \times 10^6 \text{cm}^3$

$\tau_{xy} = \frac{QG}{bl} = \frac{4\,000 \times 5.76 \times 10^6}{200 \times 18.432 \times 10^8} = 6.25 \times 10^{-2} \text{N/m}^2$

上図の要素 4 は要素 2 と, 要素 5 は要素 1 と中立軸に対して対称である. ゆえに

要素 4 : $\sigma_x = -1.37 \text{N/mm}^2$

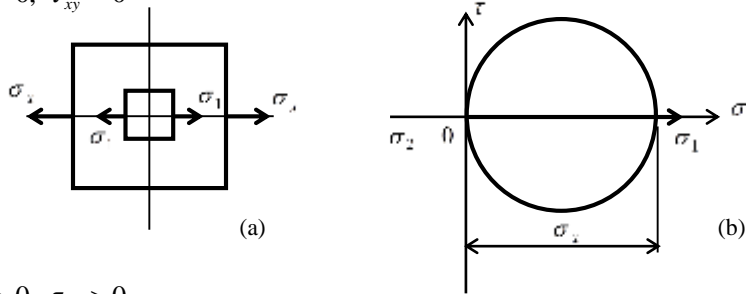
$\tau_{xy} = 4.69 \text{N/m}^2$

要素 5 : $\sigma_x = -2.73 \text{N/mm}^2$

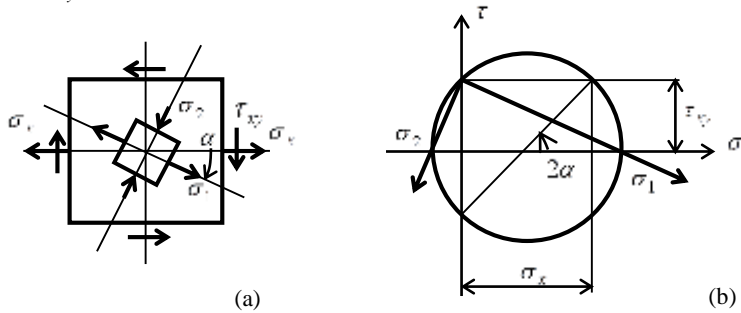
$\tau_{xy} = 0$

[例題 9.5] 例題 9.4 の要素 1 から要素 5 の主応力度をモールの応力円により求めよ. ただし, $\sigma_y = 0$ とする. 一般的なその場所での応力状態の場合を示すので, 実際の数値を代入して確認せよ.

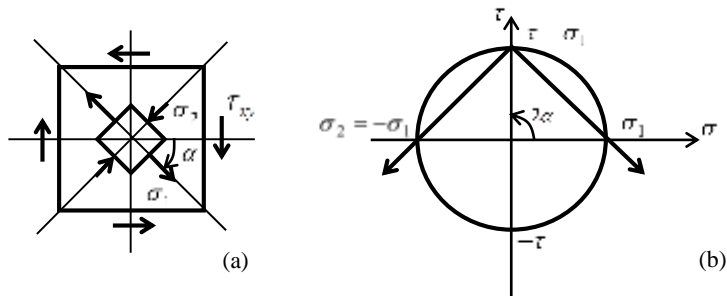
要素 1 : $\sigma_x > 0, \tau_{xy} = 0$



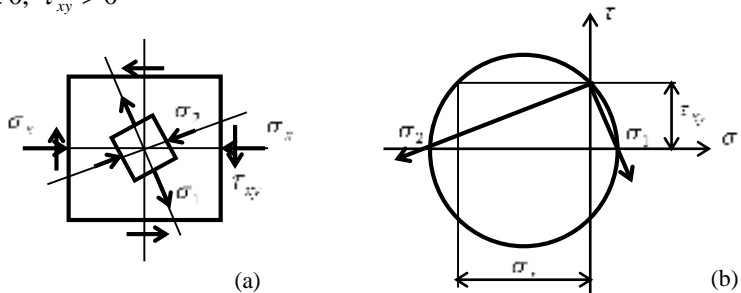
要素 2 : $\sigma_x > 0, \tau_{xy} > 0$



要素 3 : $\sigma_x = 0, \tau_{xy} > 0$



要素 4 : $\sigma_x < 0, \tau_{xy} > 0$



要素 5 : $\sigma_x < 0, \tau_{xy} = 0$

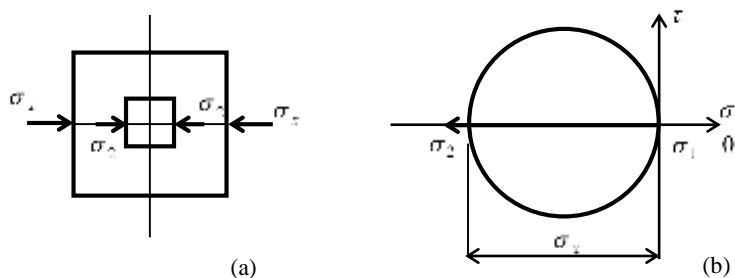


図 9.10