8　応力とひずみ

各種の材料で作られた部材に，外部から力が作用するとき，部材の内部には力に抵抗する力が生じるとともに，変形すなわちひずみがおこる．

構造物は，いくつかの材料を組み合わせて作られているが，この構造物を構成する材料を部材という．部材に作用する力のうち，部材の中心を連ねる線（部材軸）に沿って作用する力を軸方向力（軸力）といい，引張力と，圧縮力がある．

8.1　軸方向応力度

部材の両端に引張力 P を作用させる．荷重の作用点から十分離れた点 C で部材を切断した断面を考えると，この断面にも力 P と同じ大きさの力 S が作用していなければならない．すなわち

$$S=P \quad [\mathrm{N},\ \mathrm{kN}] \tag{8.1}$$

である．その S を部材力（軸力）といい，断面全体にわたって等分布の状態で作用する力となっている．

ここで，軸力 S を切断面の断面積 A で割って，式(8.1)を用いると

$$\sigma=\frac{P}{A} \quad [\mathrm{N/mm^2},\ \mathrm{kN/m^2}] \tag{8.2}$$

となる．この単位面積当たりの力を応力度と呼ぶ．単位は［kN/m²］である．通常は引張を正，圧縮を負として扱う．

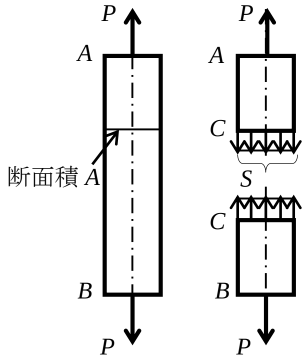

図 8.1

［問題 8.1］ 直径 20mm の鋼棒を 4kN の力で引張ったとき，この鋼棒に生じる軸方向応力度はいくらか．

［答］0.01274kN/mm²

8.2　軸方向応力度とひずみ度

部材に外力が加わり，部材力が増加していくと，部材の変形も増す．この部材力と変形の関係は材料によって一定の関係にある．

構造用鋼材の引張試験をおこなう．断面積 A，長さ l の試験片を引張り，これによるひずみ（伸び）を Δl とし，単位長さ当りのひずみ（ひずみ度）

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l} \quad [\text{無次元量}] \tag{8.3}$$

を横軸に，応力度 σ を縦軸にとって，力を増加させながら，応力度とひずみ度の関係を図示すると図 3.2 のようになる．

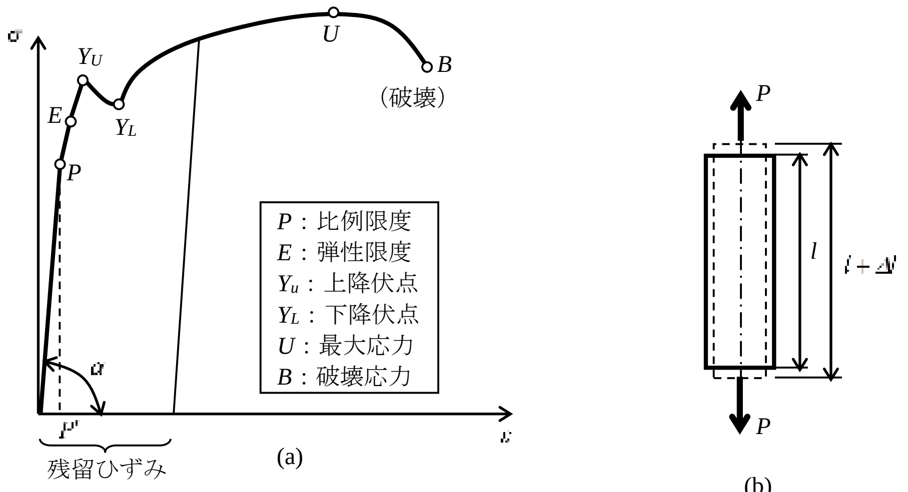

図 8.2

応力度－ひずみ度曲線の説明：

① OP 間：応力度とひずみ度は直線的に変化する．この P を**比例限度**という．

② PE 間：ややカーブを描くが，E 点で力を取り去ると伸びはもとに戻り 0 となる．この E を**弾性限度**という．

③ E を越えたとき：ひずみは急激に増え，力を取り去ってもひずみは 0 には戻らない．このとき残ったひずみを**残留ひずみ**という．

④ さらに荷重を増加させていくと，上降伏点，下降伏点を経て，最大応力に達し，B 点で破壊する．

ただし，この直線は荷重が増加しても断面積 A は一定として計算しており，実際には試験片の断面積は減少していくので，実際の変形曲線ではない．この形の応力を**公称応力**，実際の応力を**真応力**という

図 8.2 から，OP 間はこの直線と横軸とのなす角 α は鋼材の種類によって一定となる．このことから，P 点から横軸に垂線を下ろし，その足を P' とすると，

$$\tan\alpha \fallingdotseq \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{PP'}{OP'} = \text{一定} \tag{8.4}$$

この一定値を E とすると，

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E \Longrightarrow \sigma = E\varepsilon \tag{8.5}$$

の関係が得られる．この関係を**フックの法則といい**，E を**弾性係数（ヤング係数）**という．式(8.5)は応力度とひずみは比例することを表している．構造用鋼材（軟鋼）の場合，E_S=200kN/mm^2 で計算する（詳しくは第 1 章 p.3 参照）．

式(8.2)，(8.3)および式(8.5)から

$$\frac{P}{A} = E\frac{\Delta l}{l} \Longrightarrow \Delta l = \frac{Pl}{EA} \tag{8.6}$$

が得られる．

コンクリートの場合，圧縮すると応力度－ひずみ曲線は図 8.3 のように与えられ，明確な直線部分は見られない．

しかし，この場合も，コンクリートが安全に使用できる範囲と考えられる E' を図のようにとり，OE を直線と考えて，この範囲で弾性係数の値を定めている．強さによって E_C=15～50kN/mm^2 を使用する．

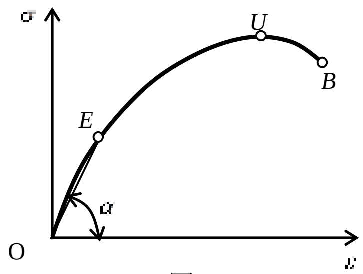

図 8.3

［**問題 8.2**］直径 10mm，長さ 1m の鋼棒を 5N の力で引張ったときの伸びを求めよ．ただし，E=2.0×10^5 N/mm^2 とする．

［**問題 8.3**］直径 20mm，長さ 2m の丸棒を 20kN の力で引張ったとき 0.63mm 伸びたとする．このときの弾性係数 E を求めよ．

8.3　ポアソン比（縦ひずみと横ひずみの関係）

右図のように引張り力が作用すると，縦方向に伸びると同時に，横方向には縮む現象が見られる．

横方向のひずみ，縦方向のひずみは，それぞれ

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta d}{d},\quad \varepsilon_y = \frac{\Delta l}{l} \tag{3.7}$$

で表され，この**横ひずみと縦ひずみの比をポアソン比** ν という．

$$\nu = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} \tag{3.8}$$

ポアソン比の逆数を**ポアソン数**という．

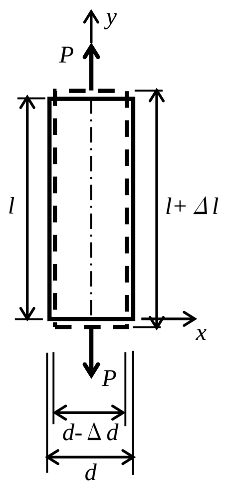

図 8.4

ポアソン比は軟鋼の場合で通常 $\nu = \frac{1}{3} \sim \frac{1}{4}$ の値をとる．

8.4　温度応力

長さ l の棒が 1℃の温度変化を受けて $d\,l$ だけ長さが変化したとすると

$$\alpha = \frac{d\,l}{l} \tag{8.9}$$

をこの材料の**線膨張係数**という．これは引張りを受けたときのひずみと同じ考えである．

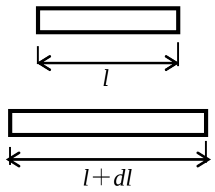

図 8.5

いま，t°C のとき長さ l の棒が，t_1°C になったとき Δl だけ伸びたとすると

$$\Delta l = \alpha l(t_1 - t) \tag{8.10}$$

両端が拘束された棒に温度変化がおこると，この伸びを抑えようとする応力が生じる．この応力を**温度応力**といい，次式で表される．

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta l}{l} = E\frac{\alpha l(t_1 - t)}{l} = E\alpha(t_1 - t) \tag{8.11}$$

温度が上昇すると圧縮応力，下降すると引張り応力となる．

［**問題 8.4**］10℃で棒を固定したとすると, 30℃のときの温度応力はいくらか. ただし, E=2.0×10^5 N/mm^2, α =0.000 001 とする．

8.5　せん断応力

8.5.1　せん断応力度

はさみで紙を切るように，大きさ等しく反対方向の力 Q が作用しているときに物体に生じる応力を**せん断応力度**といい，次式で表される．

$$\tau = \frac{Q}{A} \quad [\mathrm{N/mm^2}] \qquad （A は断面積） \tag{8.12}$$

［**問題 8.5**］ボルトで接合された鋼板が P=1.5kN の力で引張られているときボルトに生じるせん断応力を求めよ．

8.5.2　せん断応力度とせん断ひずみ度の関係（Hooke の法則）

微小距離 Δl だけ隔たった面 AB, CD に沿って，大きさ等しく，方向反対のせん断応力 τ が作用している場合，AB をもとにして CD は $C'D'$ に変位する．AC と AC' のなす角 γ を**せん断ひずみ度**という．

$$\tan\gamma \approx \gamma = \frac{CC'}{AC} \tag{8.13}$$

せん断応力とせん断ひずみの間にも Hooke の法則が成立する．

$$\tau = G\gamma \tag{8.14}$$

この式の G を**せん断弾性係数**といい，弾性係数との間に次式が成立する．

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{8.15}$$

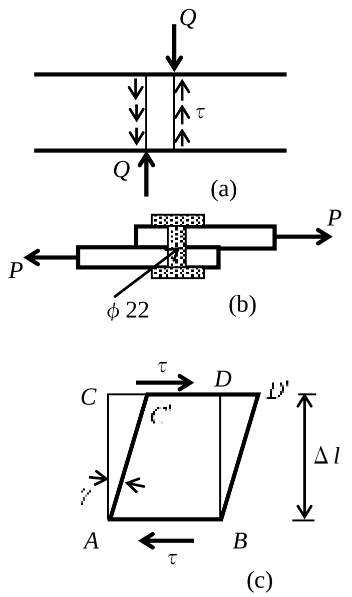

図 8.6

［**例**］　E=2.0×10^5 N/mm^2,　$\nu = 0.3$ の場合，$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 7.7\times10^4$ N/mm^2 となる．

8.6　組合せ部材の応力

［**例題 8.1**］図 8.7 のような 2 つの部材が一体として働き，軸方向圧縮力 P を受けているとき，各部材に生じる応力を求めよ．

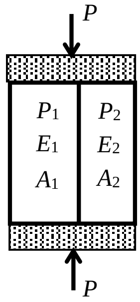

図 8.7

［**解**］各部材に働く力をそれぞれ P_1，P_2 とする．2 つの部材は同じ大きさのひずみを生じるから

$$\varepsilon = \frac{P_1}{E_1 A_1} = \frac{P_2}{E_2 A_2} \tag{8.16}$$

一方

$$P = P_1 + P_2$$

であるから

$$\varepsilon = \frac{P_1}{E_1 A_1} = \frac{P_2}{E_2 A_2} = \frac{P_1 + P_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} = \frac{P}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \tag{8.17}$$

したがって

$$\sigma_1 = \frac{PE_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} = \frac{P}{A_1 + nA_2} \qquad \sigma_2 = \frac{PE_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} = \frac{nP}{A_1 + nA_2} \tag{8.18}$$

上式で $n = E_2 / E_1$ と置く．これは部材 1 と 2 の弾性係数の比を取ったもので**換算弾性係数**と呼ばれる．

［**例題 8.2**］図のような鉄筋とコンクリートからなる構造物において，それぞれの断面積を A_S，A_C，弾性係数を E_S，E_C，弾性係数の比を n $=E_S/E_C$ とすると，コンクリートの部分の応力度は

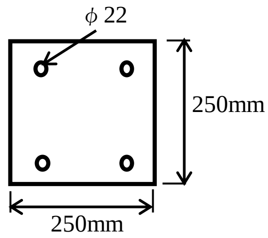

図 8.9

$$\sigma_C = \frac{PE_C}{E_C A_C + E_S A_S} = \frac{P}{A_C + nA_S} = \frac{P}{A'_C}, \quad (A'_C = A_C + nA_S) \tag{8.19}$$

鉄筋部分の応力度は

$$\sigma_S = \frac{P}{A_S + (E_C / E_S) A_S} = \frac{P}{A_S + A_C / n} = \frac{P}{A'_S}, \quad (A'_S = A_S + A_C / n) \tag{8.20}$$

式(8.19)はコンクリートの応力度が，荷重をコンクリートの断面積と鉄筋の断面積の 15 の合計で割ったものであることを示し，式(8.20)は鉄筋の応力度が鉄筋の断面積とコンクリートの断面積の 1/n の合計で割ったものであることを示す．この A'_C，A'_S を**換算断面積**といい，応力度は荷重を断面積で割った式(8.2)の形になっている．

［**問題 8.6**］図 8.8 のような 3 つの部材が一体として働き，軸方向圧縮力 P を受けているとき，各部材に生じる力を求めよ．

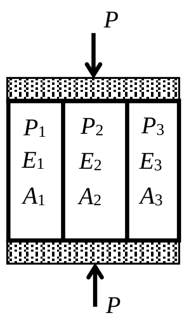

図 8.8

［**問題 8.7**］図 8.9 のような鉄筋コンクリートの柱に，50kN の圧縮力が作用するとき，コンクリートと鉄筋の応力はいくらか．ただし，$E_S = 2.0 \times 10^5\,\mathrm{N/mm^2}$，$E_C = 1.33 \times 10^4\,\mathrm{N/mm^2}$ とする．

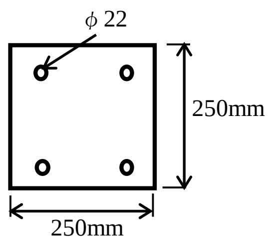

図 8.9

［**問題 8.8**］部材の両端 A，B が固定され，点 C で結合された部材がある(図 8.10)．点 C に力 P が作用したとき，A，B に生じる力 R_1，R_2 を求めよ．

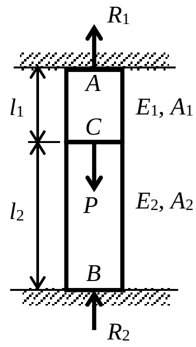

図 8.10

［**問題 8.9**］図 8.11 のような断面積 A（一定），長さ l，弾性係数 E，単位体積重量 ω の棒が天井から吊下げられている．自重による伸びを求めよ．

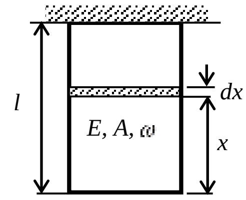

図 8.11

［**問題 8.10**］図 8.12 のような 1 辺が 100mm，長さ 2m の正方形部材 1 と，1 辺が 50mm，長さ 1m の正方形部材 2 が点 B で結合されているとき，部材全体 AC の長さの変化量 Δl はいくらか．ただし，弾性係数 $E = 2.0 \times 10^5 \,\mathrm{N/mm^2}$ とする．

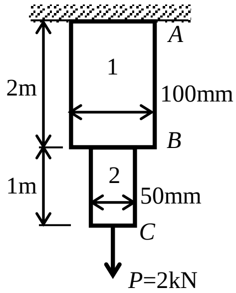

図 8.12

ちょっと休憩［8－1］（応力と応力度）

1.　広辞苑で「応力」という単語を引いてみると
「物体が荷重を受けたとき荷重に応じて物体の内部に生ずる抗応力，その強さは物体の内部にとった任意の単位面積を通して両側の部分が互いに及ぼしあう力で表される」
とある．
　これによると，応力という言葉は，外力が作用したとき，部材の内部に誘発される力あるいは外力に抵抗する力で，単位は［kN］である．強さとは単位面積当たりの力で単位は［kN/m²］となる．

4. 応力と言う言葉がまぎらわしい場合には，本書では次の表現を用いることにする．
　外部から加わる力 ⟹ **外力（力）**
　外力の作用によって部材の内部に生ずる力 ⟹ **部材力**
　単位面積当たりの力 ⟹ **応力度**
したがって，力と部材力の単位は［kN］，応力度の単位は［kN/m²］となる．