7　部材断面の性質

7.1　断面 1 次モーメント

7.1.1　断面 1 次モーメント

点(x,y)において微小面積 $dA = dx \cdot dy$ を考える．この微小面積を重さ(力)と考えると，この力と x 軸からの距離 y を掛けたもの $dA \times y$ は x 軸に対するモーメントである．

これを全面積にわたって寄せ集めたものを**断面 1 次モーメント**と呼び，次式で定義する．

$$G_x = \int y\,dA \tag{7.1}$$

同様に y 軸に関する断面 1 次モーメントは

$$G_y = \int x dA \tag{7.2}$$

式(6.1),(6.2)を級数の形で書けば

$$G_x = \sum_i y_i A_i \qquad G_y = \sum_i x_i A_i \tag{7.3}$$

図(b)の場合は

$$G_x = \int_{y_1}^{y_2} a\,y\,dy \qquad G_y = \int_{x_1}^{x_2} b\,x\,dx \tag{7.4}$$

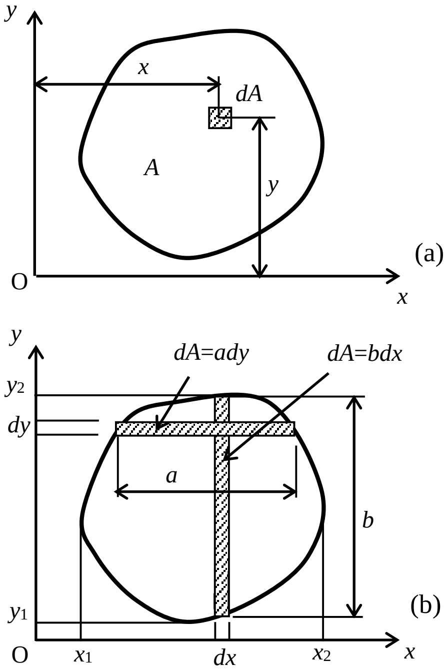


図 7.1

［例題 7.1］ 図 7.2 の長方形断面の x 軸に対する断面 1 次モーメントを求めよ．

［解］

微小面積　$dA=ady$

x 軸に対する断面 1 次モーメント

$$G_x = \int ydA = \int_0^b aydy = \frac{ab^2}{2}$$

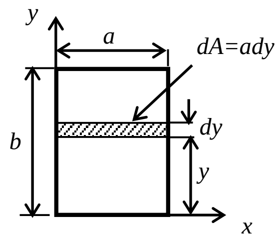


図 7.2

［問題 7.1］ y 軸に関する断面 1 次モーメントを求めよ．

［例題 7.2］ 図形の面積と，x 軸からその面積の中心までの距離 y_0 が求められていると，上式は次のように簡単になる．

$$G_x = y_0 A \tag{7.5}$$

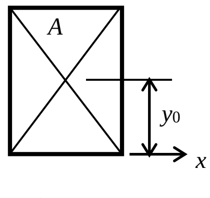


図 7.3

図 6.3.では，断面積は $A=ab$，x 軸からの距離は $y_0 = \dfrac{b}{2}$ であるから式(7.5)より

$$G_x = y_0 A = \frac{b}{2} \cdot ab = \frac{ab^2}{2}$$

となって，例題 6.1 と同じになる．

7.1.2　集合図形の断面 1 次モーメント

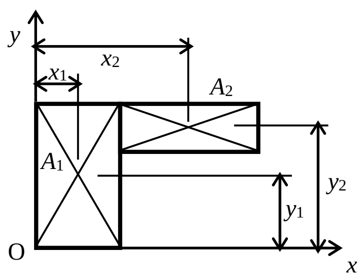


図 7.4

長方形，三角形等の単純な図形を組み合わせた図形の断面 1 次モーメントは，各図形の面積を A_1, A_2, ･･･，x，y 軸から各図形の中心までの距離を y_1, y_2,･･･，x_1, x_2,･･･とすると

$$\left.\begin{aligned} G_x &= y_1A_1 + y_2A_2 + \cdots + y_nA_n \\ G_y &= x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

となる（図 7.4）．

［注意］
断面 1 次モーメントの符号は，直行軸 x, y のとり方によって**正または負**に変化する．
断面 1 次モーメントは **面積×距離** であるから，単位は**長さの 3 乗[mm³]**となる．

［例題 7.3］図 7.5 の図形の断面 1 次モーメントを求めよ．

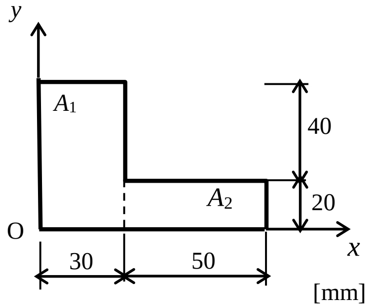


図 7.5

［解］
断面を 2 つの長方形に分ける．

A_1=30×60=1 800 mm²　　A_2=50×20=1 000 mm²
y_1=30 mm　　y_2=10mm
x_1=15 mm　　x_2=55mm

$$G_x = y_1A_1 + y_2A_2 = 30\times1800 + 10\times1000 = 64\times10^3\ \text{mm}^3$$

$$G_y = x_1A_1 + x_2A_2 = 15\times1800 + 55\times1000 = 82\times10^3\ \text{mm}^3$$

7.1.3　軸の平行移動

座標軸 x，y を平行移動して新しい座標軸 u，v を設ける．

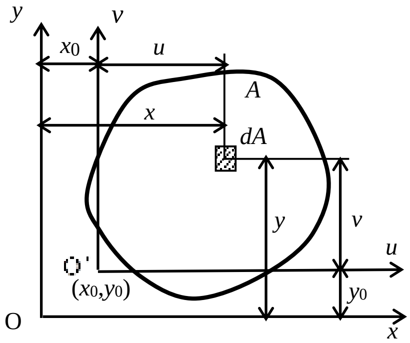


図 7.6

x，y＝面積要素 dA の旧座標
u，v＝面積要素 dA の新座標
x_0，y_0＝旧座標に対する新座標の原点

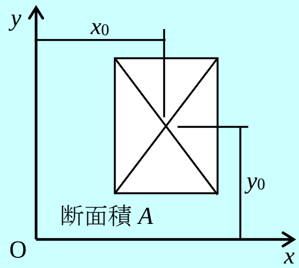
$$x = x_0 + u\,,\qquad y = y_0 + v$$

新しい座標軸に対する断面 1 次モーメントは

$$\left.\begin{aligned} G_u &= \int v dA = \int (y-y_0)dA = \int y dA - y_0\int dA = G_x - y_0A\,, \quad \text{すなわち}\quad G_u = G_x - y_0A \\ G_v &= \int u dA = \int (x-x_0)dA = \int x dA - x_0\int dA = G_y - x_0A\,, \quad \text{すなわち}\quad G_v = G_y - x_0A \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

ちょっと休憩[7－1]（断面 1 次モーメントの求め方）

断面 1 次モーメントは，
「基準となる軸からその図形の中心までの距離と，部材の断面積を掛けたもの」
と考えてよい．
式で書けば，右図において
$G_x=y_0A$,　$G_y=x_0A$
となる．
これは，面積 A を｢作用している力｣と考えれば，x，y 軸に関するモーメントと考えられる．



7.2　図心

7.2.1　図心

1 点を通る任意の軸に対する図形の断面 1 次モーメントが 0 となる点を図心と定義する.

図 7.6 で O′が図心であるとすれば，定義より式(7.7)において $G_u = 0, G_v = 0$ とおくと，図心を求める次の公式が得られる.

$$x_0 = \frac{G_y}{A}, \quad y_0 = \frac{G_x}{A} \tag{7.8}$$

「ある軸 *x*，*y* から図心位置までの距離 x_0，y_0 は，*x*，*y* 軸に関する断面 1 次モーメントをその面積で割ったものである」

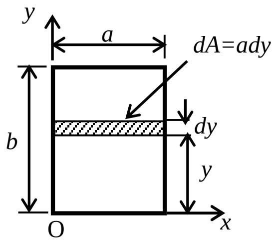


図 7.7

［**例題 7.4**］長方形断面（図 7.7）の図心を求めよ.

［**解**］例題 7.1 より *x* 軸に対する断面 1 次モーメントは $G_x = \dfrac{ab^2}{2}$，

断面積は $A = ab$ であるから，式(7.7)より

$$y_0 = \frac{G_x}{A} = \frac{ab^2}{2} \Big/ ab = \frac{b}{2}$$

例題 7.2 で面積の中心までという，あいまいな表現を使用したが，これは実は図心までの距離を表したものである．すなわち，図心は図形の中心という意味で使用される.

7.2.2　集合図形の図心

断面が多くの断面の集合体からなっていて，それぞれの図心位置を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots$ とすると合成図形の図心 (x_0, y_0) は

$$x_0 = \frac{G_y}{A} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots}{A_1 + A_2 + \cdots}, \quad y_0 = \frac{G_x}{A} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + \cdots}{A_1 + A_2 + \cdots} \tag{7.9}$$

で求められる.

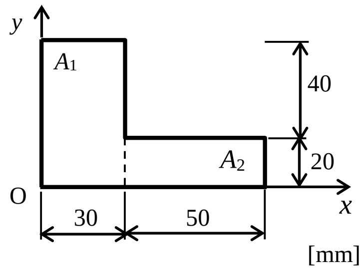


図 7.8

［**例題 7.5**］図 7.8 の図心位置を求めよ.

［**解**］　面積　$A = A_1 + A_2 = 2\,800\,\mathrm{mm}^2$

　したがって，式(6.9)より

$$x_0 = \frac{G_y}{A} = \frac{82 \times 10^3}{2.8 \times 10^3} = 29.3\mathrm{mm}, \quad y_0 = \frac{G_x}{A} = \frac{64 \times 10^3}{2.8 \times 10^3} = 22.9\mathrm{mm}$$

ちょっと休憩[7－2]（図心の求め方）

図心の求め方

1. 図形が 2 本以上の対称軸をもつときは，その交点が図心.
2. 1 本の対称軸をもつ図形では，その対称軸上に図心がある.
   対称軸に直角に適当な軸を設け図心を計算する.
3. 対称軸をもたない図形では式(7.6)で計算する.
   座標軸 *x*，*y* は計算が楽になるように設定する.
4. 三角形，矩形，円などの図心は既知なものとして使用する.
5. 集合図形は適当に単純な図形に分割して計算する.

注）　**重心**：図形が重さをもつと仮定すると，その重さは面積に比例し，ある 1 点に集中して働く．この重さの中心を重心という.

［**例題 7.6**］三角形断面（図 7.9）の x 軸に対する図心を求めよ．

［**解**］ $A = \dfrac{1}{2}ab$

y 点の長さ　$a' = \dfrac{a}{b}(b - y)$　であるから

$$dA = a' \cdot dy = \frac{a}{b}(b - y)dy$$

$$G_x = \int y dA = \int_0^b \frac{a}{b}(b - y)y dy = \frac{ab^2}{6}$$

$$y_0 = \frac{G_x}{A} = \left(\frac{ab^2}{6}\right)\Big/\left(\frac{ab}{2}\right) = \frac{b}{3}$$

すなわち，底辺から 3 分の 1 の点にある．

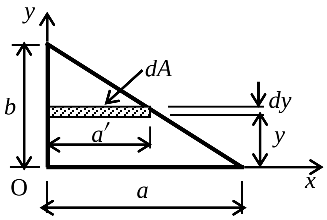


図 7.9

［**問題 7.2**］三角形断面（図 7.9）の y 軸に対する図心を求めよ．

［**例題 7.7**］半径 r の 4 分円（図 7.10）の x 軸に対する図心を求めよ．

［**解**］ $A = \dfrac{\pi r^2}{4}$

y 点の長さ　$r' = \sqrt{r^2 - y^2}$　であるから

$$dA = r' \cdot dy = \sqrt{r^2 - y^2}\,dy$$

$$G_x = \int_0^r y\,dA = \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\,y\,dy$$

この積分は次のように行う．

$r^2 - y^2 = t^2$　とおくと　$ydy = -tdt$　となり

$y = 0$　のとき　$t = r$，　$y = r$　のとき　$t = 0$　であるから

$$G_x = \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\,ydy = -\int_r^0 t^2 dt = -\frac{1}{3}[t^3]_r^0 = -\frac{1}{3}(0 - r^3) = \frac{1}{3}r^3$$

$$y_0 = \frac{G_x}{A} = \left(\frac{1}{3}r^3\right)\Big/\left(\frac{\pi r^2}{4}\right) = \frac{4r}{3\pi}$$

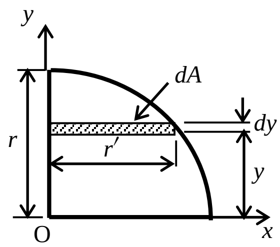


図 7.10

［**例題 7.8**］図 7.11 の台形断面の x 軸に対する図心を求めよ．

［**解**］点線で 2 つの三角形に分割する．

$A_1 = \dfrac{1}{2}bh$　　　$A_2 = \dfrac{1}{2}ah$

$y_1 = \dfrac{h}{3}$　　　$y_2 = \dfrac{2h}{3}$

式(3.9)より

$$y_0 = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\dfrac{h}{3}\dfrac{bh}{2} + \dfrac{2h}{3}\dfrac{ah}{2}}{\dfrac{bh}{2} + \dfrac{ah}{2}} = \frac{h}{3}\frac{2a + b}{a + b}$$

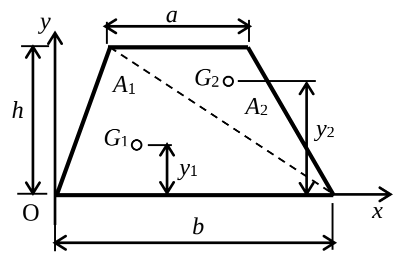


図 7.11

［**例題 7.9**］図 7.12 の影部分の x 軸に対する図心を求めよ．

［**解**］ $A_1 = \pi r_1^2$　　　$A_2 = \pi r_2^2$

$y_1 = r_1$　　　$y_2 = r_2$

式(3.9)より

$$y_0 = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\pi(r_1^3 - r_2^3)}{\pi(r_1^2 - r_2^2)} = \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{r_1 + r_2}$$

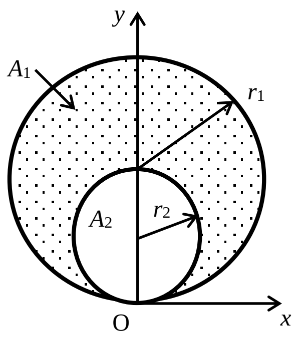


図 7.12

［**問題 7.3**］次の図形の図心位置を求めよ.

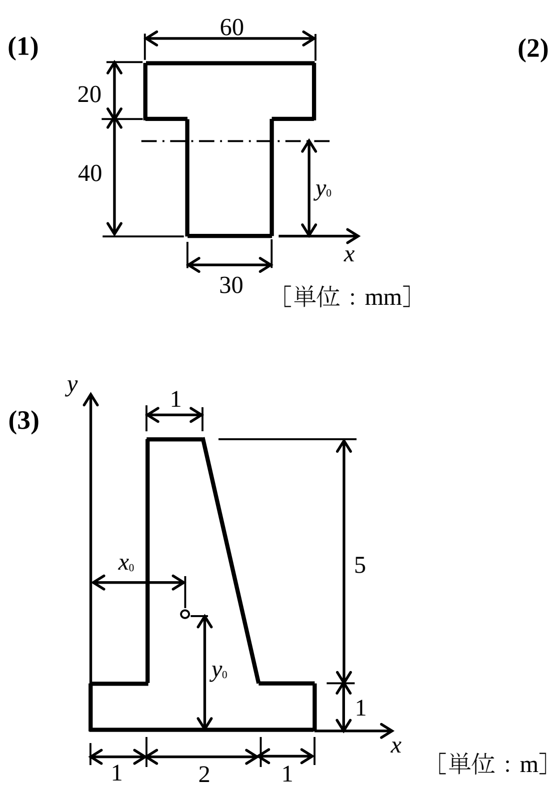
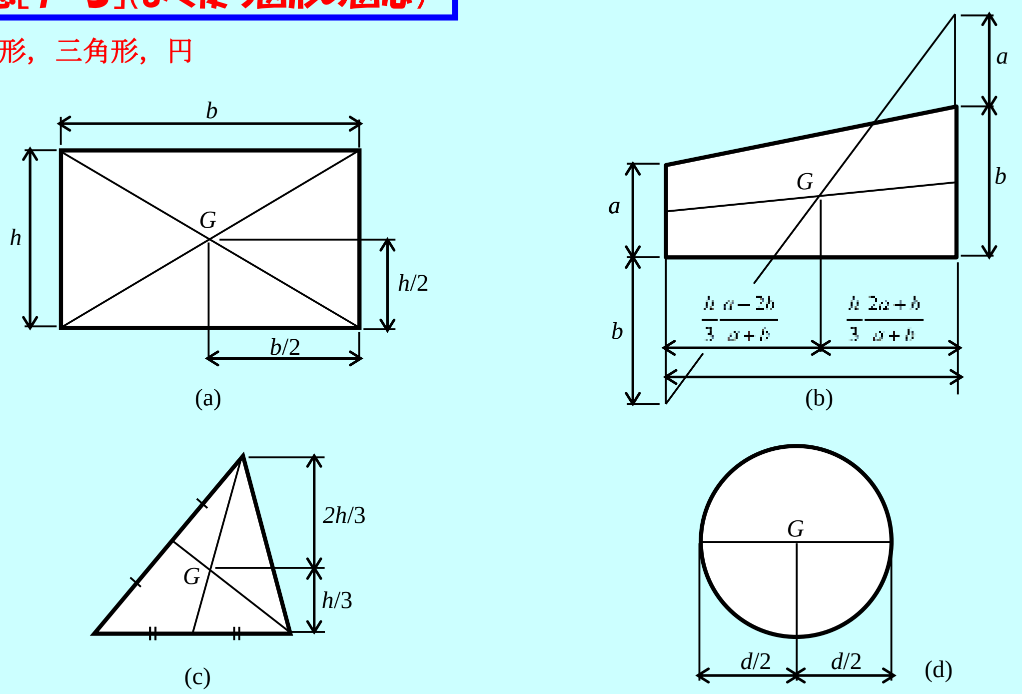


図 7.13

ちょっと休憩[7－3](よく使う図形の図心)

長方形，台形，三角形，円



7.3　断面 2 次モーメント

7.3.1　断面 2 次モーメント

右図の座標系において，次の式で与えられる量を断面 2 次モーメントと定義する．

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \int y^2 dA \quad x \text{ 軸に関する断面 2 次モーメント} \\ I_y &= \int x^2 dA \quad y \text{ 軸に関する断面 2 次モーメント} \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

これらの式は距離の 2 乗に面積を掛けたものであるから，単位は［**mm**^{4}］である．

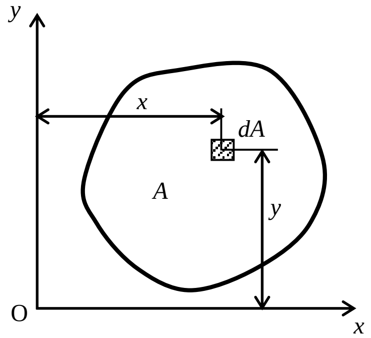


図 7.14

7.3.2　軸の平行移動

座標軸 x，y を平行移動して新しい座標軸 u，v を設ける．

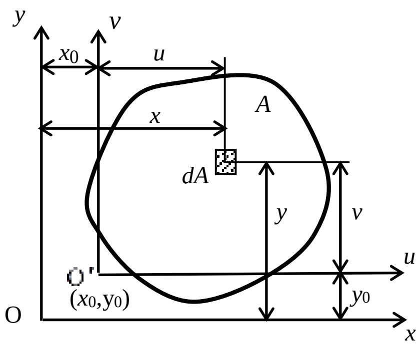


図 7.15

x，y＝面積要素 dA の旧座標
u，v＝面積要素 dA の新座標
x_0，y_0＝旧座標に対する新座標の原点

$$x = x_0 + u\,,\quad y = y_0 + v$$

断面 1 次モーメントの場合と同様に，式(7.10)に　$x = x_0 + u$，　$y = y_0 + v$　を代入して展開する．

$$I_x = \int y^2 dA = \int (y_0 + v)^2 dA = \int v^2 dA + 2y_0 \int v dA + y_0^2 \int dA = I_u + 2y_0 G_u + y_0^2 A$$
$$I_y = \int x^2 dA = \int (x_0 + u)^2 dA = \int u^2 dA + 2x_0 \int u dA + x_0^2 \int dA = I_v + 2x_0 G_v + x_0^2 A$$

ここで，新しい座標軸を，図心を原点 (x_0, y_0) にもつ座標軸とすれば

$$G_u = G_v = 0$$

となるから，上式は次式となる．

$$I_x = I_u + y_0^2 A\,,\qquad I_y = I_v + x_0^2 A \tag{7.11}$$

この式は，図心を通る座標軸 (u, v) の断面 2 次モーメント (I_u, I_v) を，任意の軸(x,y)の断面 2 次モーメント (I_x, I_y) に換算する式で，よく使用される．

［注意事項］

1. 式(7.11)の $y_0^2 A$, $x_0^2 A$ は正であるから，図心を通る断面 2 次モーメントが最小であることがわかる．
2. 式(7.11)より，任意の座標軸の(x,y)の断面 2 次モーメント (I_x, I_y) がわかれば，図心を通る座標軸 (u, v) の断面 2 次モーメント (I_u, I_v) は
$$I_u = I_x - y_0^2 A\,,\qquad I_v = I_y - x_0^2 A \tag{7.12}$$
より求められる．
3. 断面 2 次モーメントの単位は［**mm**^{4}］．

［**例題 7.10**］次の長方形断面の図心軸を通る軸 u に対する断面 2 次モーメントを求めよ．また，x 軸に対する断面 2 次モーメントはいくらか.

［解］

$$I_u = \int y^2 dA = b\int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = 2b\int_0^{h/2} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_x = I_u + y_0^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3}$$

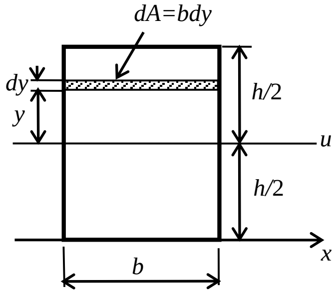


図 7.16

［**例題 7.11**］次の三角形断面の図心軸を通る軸 u に対する断面 2 次モーメントを求めよ．また，x 軸に対する断面 2 次モーメントはいくらか.

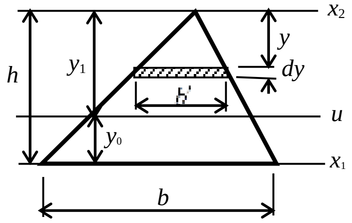


図 7.17

［解］ $b' = \dfrac{b}{h}y$,　$A = \dfrac{bh}{2}$,　$dA = b'dy = \dfrac{b}{h}ydy$

$$I_{x_2} = \int_0^h y^2 dA = \frac{b}{h}\int_0^h y^3 dy = \frac{bh^3}{4}$$

$$I_u = I_{x_2} - y_1^2 A = \frac{bh^3}{4} - \left(\frac{2h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{x_1} = I_u + y_0^2 A = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{12}$$

［**例題 7.12**］次の円形断面の図心軸を通る軸 u に対する断面 2 次モーメントを求めよ.

［解］ $dA = bdy$,　$b = 2r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$,　$\dfrac{dy}{d\theta} = r\cos\theta$

$dA = bdy = 2r\cos\theta \cdot r\cos\theta\, d\theta = 2r^2\cos^2\theta\, d\theta$

$$I_u = \int_{-r}^{r} y^2 dA = 2\int_0^r y^2 dA = 2\int_0^{\pi/2}(r\sin\theta)^2(2r^2\cos^2\theta)d\theta$$

$$= 4r^4\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = r^4\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\, d\theta$$

$$= r^4\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta = \frac{r^4}{2}\left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^4}{4}$$

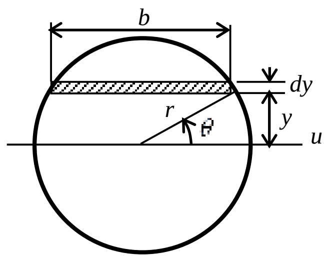
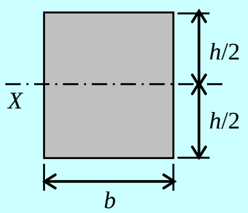


図 7.18

ちょっと休憩［7－4］（断面 2 次モーメント）

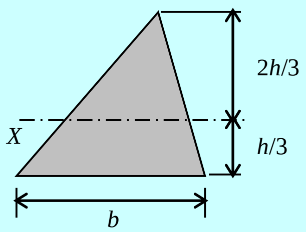
次の各図形の図心軸における断面 2 次モーメントは公式として使用する.

長方形断面



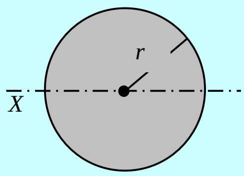
$$I_X = \frac{bh^3}{12}$$

三角形断面



$$I_X = \frac{bh^3}{36}$$

円形断面



$$I_X = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

［**例題 7-13**］x 軸に平行な図心軸に関する断面 2 次モーメントを求めよ．

［**解**］図心位置は

$$y_0=\frac{2h\cdot A_1+5h\cdot A_2}{A_1+A_2}=\frac{2h\cdot 4bh+5h\cdot 8bh}{4bh+8bh}=\frac{48bh^2}{12bh}=4h$$

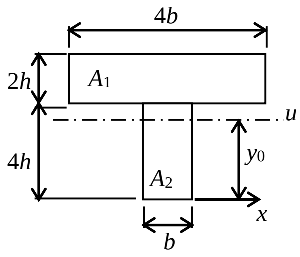


図 a

A_1 の下端，A_2 の上端が図心であるから，例題 7.10 より

A_1 部分の下端の断面 2 次モーメントは：$I_1=\dfrac{4b(2h)^3}{3}=\dfrac{32bh^3}{3}$

A_2 部分の上端の断面 2 次モーメントは：$I_2=\dfrac{b(4h)^3}{3}=\dfrac{64bh^3}{3}$

ゆえに，図心軸に関する断面 2 次モーメントは，　$I_u=I_1+I_2=32bh^3$

［**例題 7-14**］薄肉断面管の断面 2 次モーメント．

［**解**］断面 2 次モーメント：$I=\dfrac{\pi r_1^4}{4}-\dfrac{\pi r_2^4}{4}$

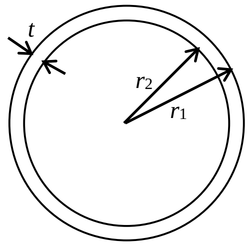


図 b

これを変形する．

$$\begin{aligned}I&=\frac{\pi r_1^4}{4}-\frac{\pi r_2^4}{4}=\frac{\pi}{4}(r_1^4-r_2^4)=\frac{\pi}{4}(r_1^2+r_2^2)(r_1+r_2)(r_1-r_2)\\&=\frac{\pi}{4}\cdot 2r\cdot t\cdot 2(2r^2-r_1r_2)=\pi rt(2r^2-r_1r_2)=\pi rt\left(2r^2-r^2+\frac{t^2}{4}\right)\\&=\pi rt\left(r^2+\frac{t^2}{4}\right)=\pi r^3t\end{aligned}$$

ここに，

$$r_1-r_2=t,\quad \frac{r_1+r_2}{2}=r,\quad A=\pi(r_1^2-r_2^2)\approx 2\pi rt$$

$$r_1^2+r_2^2=r_1^2+2r_1r_2+r_2^2-2r_1r_2=(r_1+r_2)^2-2r_1r_2=(2r)^2-2r_1r_2=4r^2-2r_1r_2$$

$$4r^2=(r_1+r_2)^2=r_1^2+2r_1r_2+r_2^2=(r_1-r_2)^2+4r_1r_2=t^2+4r_1r_2$$

［**問題 7.4**］次の各問に答えよ．

(1)　次図の x_1, x_2, x_3 軸に対する断面 2 次モーメントを求めよ．

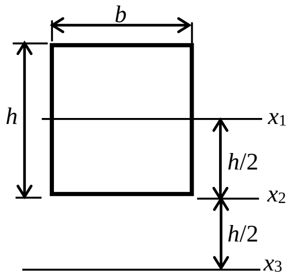


図 7.19

(2)　次図の図心軸 x に対する断面 2 次モーメントを求めよ．

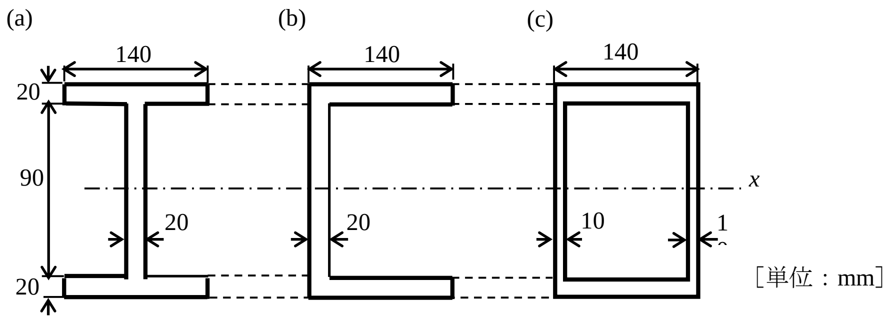


図 7.20

(3)　次図の図心軸 x に対する断面 2 次モーメントを求めよ．

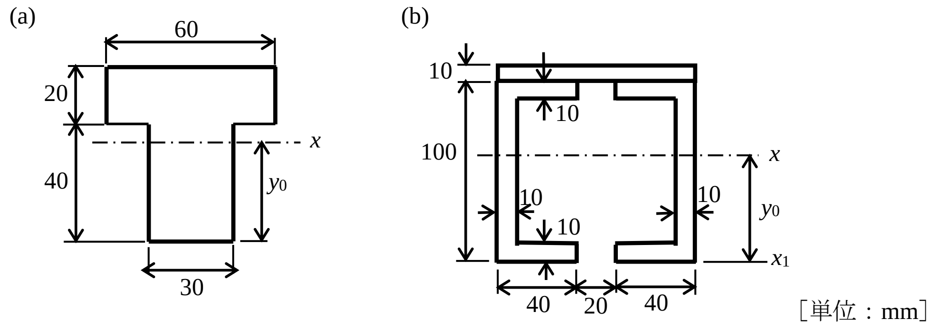


図 7.21

(4)　次図の x 軸および図心軸 G に対する断面 2 次モーメントを求めよ．

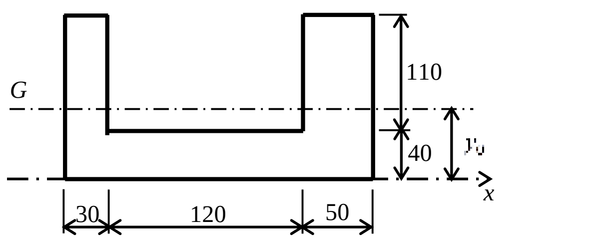


図 7.22

7.3.3　断面極 2 次モーメント

点 O に関する断面極 2 次モーメントを次式で定義する.

$$I_p = \int_A r^2 dA \tag{7.13}$$

ここで

$$r^2 = x^2 + y^2$$

を代入すると

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y \tag{7.14}$$

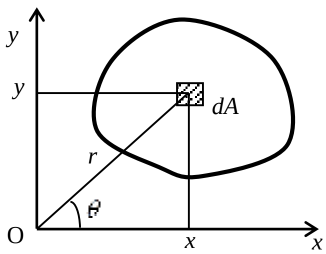


図 7.23

［**例題 7.15**］円形断面の図心を通る軸に対する断面 2 次モーメントを断面極 2 次モーメントを用いて求めよ.

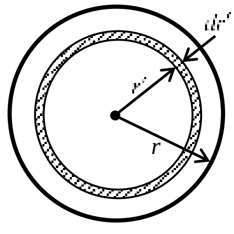


図 7.24

［**解**］ $dA = 2\pi r' dr'$

$$I_p = \int_0^r r'^2 dA = \int_0^r 2\pi r' r'^2 dr' = 2\pi \left[\frac{r'^4}{4} \right]_0^r = \frac{\pi r^4}{2}$$

ここで　$I_p = I_x + I_y$，また，円であるから　$I_x = I_y$

ゆえに　$I_p = 2I_x = 2I_G$，　$I_G = \dfrac{I_p}{2} = \dfrac{\pi r^4}{4}$

［**例題 7.16**］円の断面 2 次モーメントを図 7.25 のように微小面積 dA を用いて求めよ（前出，別解）.

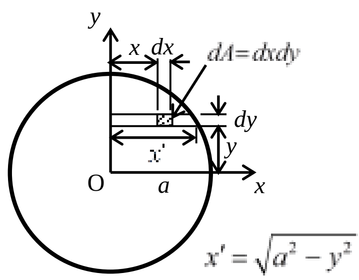


図 7.25

［**解**］ $I_x = \int_A y^2 dA = \int_A y^2 dxdy = 4\int_0^a \cdot \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \cdot y^2 dy = 4\int_0^a y^2 \sqrt{a^2 - y^2}\, dy$

$y = a \sin\theta$ によって積分変数を y から θ にかえて積分すると

$$I_x = 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\, d\theta = \frac{\pi a^4}{4}$$

［**例題 7.17**］　図 7.26 のような 1 辺の長さが a の正方形の対角線のまわりの断面 2 次モーメントを求めよ.

［**解**］図(a)について

$$I_x = \int_A y^2 dxdy = 4\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \cdot \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}-y} dx \cdot y^2 dy = \frac{a^4}{12}$$

［**別解**］図(b)のように座標軸を 45° 回転して求めれば

$$I_X = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

において

$$\sin\theta = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\theta = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad I_y = I_x = \frac{a^4}{12},\quad I_{xy} = 0$$

であるから

$$I_y = \frac{a^4}{12}$$

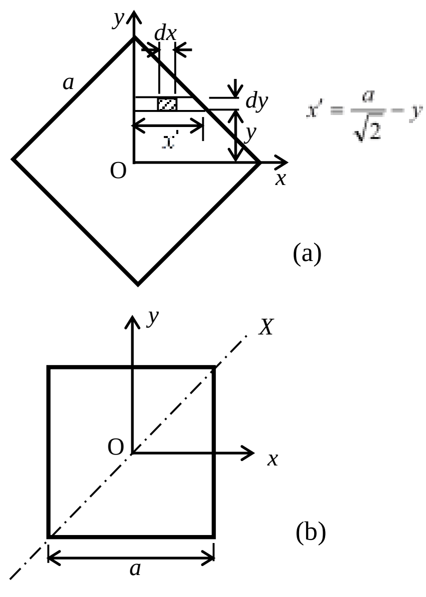


図 7.26

7.4　相乗モーメント

7.4.1　相乗モーメント

右図の座標系において，次の式で与えられる量を相乗モーメントと定義する．

$$I_{xy} = \int x\, y\, d \tag{7.15}$$

単位は［**mm⁴**］であり，正負の符号をとる．

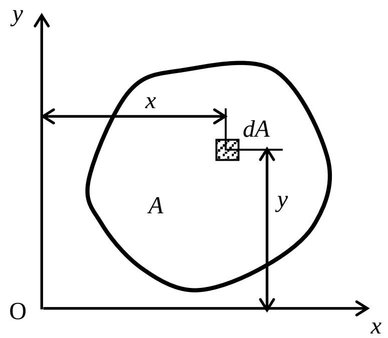


図 7.27

7.4.2　軸の平行移動

座標軸 x，y を平行移動して新しい座標軸 u，v を設ける．

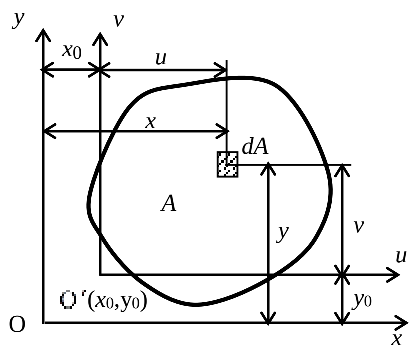


図 7.28

x，y＝面積要素 dA の旧座標
u，v＝面積要素 dA の新座標
x_0，y_0＝旧座標に対する新座標の原点

$$x = x_0 + u\,,\quad y = y_0 + v$$

断面 2 次モーメントの場合と同様に，式(7.15)に $x = x_0 + u$, $y = y_0 + v$ を代入して展開する．

$$I_{xy} = \int xydA = \int (x_0 + u)(y_0 + v)dA$$
$$= \int uvdA + y_0 \int udA + x_0 \int vdA + x_0 y_0 \int dA = I_{uv} + x_0 G_u + y_0 G_v + x_0 y_0 A$$

ここで，新しい座標軸を，図心を原点 (x_0, y_0) にもつ座標軸とすれば

$$G_u = G_v = 0$$

となるから，上式は次式となる．

$$I_{xy} = I_{uv} + x_0 y_0 A \tag{7.16}$$

この式は，図心を通る座標軸 (u, v) の相乗モーメント (I_{uv}) を，任意の軸 (x,y) の相乗モーメント (I_{xy}) に換算する式である．

7.4.3　対称軸と相乗モーメント

右図のような y 軸に対称な図形を考える．相乗モーメントは

$$I_{xy} = \int_A xydA = \int_{-y_1}^{y_2} ydy \int_{-x_0}^{x_0} xdx = \int_{-y_1}^{y_2} ydy \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-x_0}^{x_0} = 0$$

すなわち，与えられた図形が対称軸 y をもつときは，これに直交する任意の軸を x 軸とすれば，x,y 軸についての相乗モーメントは 0 となる．あるいは簡単にいえば，**対称軸についての相乗モーメントは 0** である．

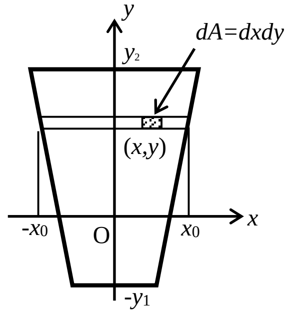


図 7.29

［**例題 7.18**］矩形断面の *xy* 軸に対する相乗モーメントを求めよ．

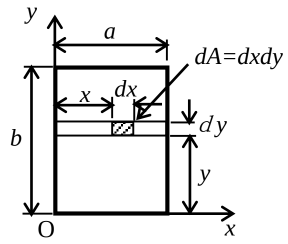


図 7.30

［解］

$$I_{xy}=\int_A xydA=\int_0^b ydy\int_0^a xdx=\frac{a^2b^2}{4}$$

または

$$I_{xy}=I_{uv}+x_0y_0A=0+\frac{a}{2}\frac{b}{2}ab=\frac{a^2b^2}{4}$$

［**例題 7.19**］三角形断面の *xy* 軸に対する相乗モーメントを求めよ．

［解］

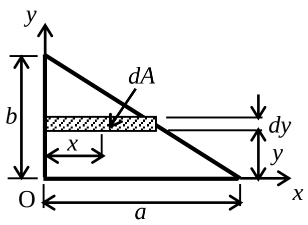


図 6.31

図の微小面積　$dA=\dfrac{a(b-y)}{b}dy$

微小面積の y 軸から図心までの距離　$x=\dfrac{a(b-y)}{2b}$

ゆえに

$$I_{xy}=\frac{a^2}{2b^2}\int_0^b(b-y)^2ydy=\frac{a^2b^2}{24}$$

［**問題 7.5**］次の矩形断面の *xy* 軸に対する相乗モーメントを求めよ．

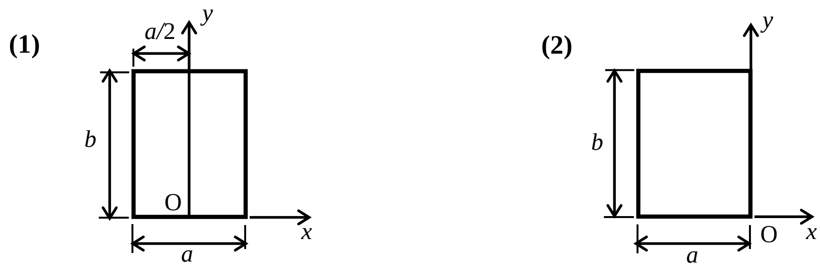


図 7.32

7.5　座標軸の回転と主軸

7.5.1　座標軸の回転

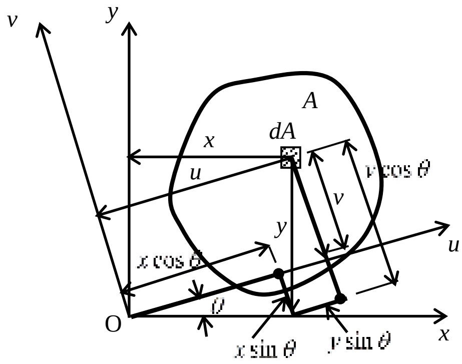


図 7.33

右図のように原点を共有して，座標軸を Oxy から Ouv へ θ だけ回転する．このとき両座標系の間には右図より

$$\left.\begin{aligned} u &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ v &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (7.17)$$

あるいは

$$\left.\begin{aligned} x &= u\cos\theta - v\sin\theta \\ y &= u\sin\theta + v\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (7.18)$$

の関係を得る．

7.5.2　新座標と旧座標の関係

断面 1 次モーメント

$$G_u = \int_A v dA = \int_A (-x\sin\theta + y\cos\theta) dA = \cos\theta \int_A y\,dA - \sin\theta \int_A x\,dA = G_x\cos\theta - G_y\sin\theta \qquad (7.19)$$

$$G_v = \int_A u dA = \int_A (x\cos\theta + y\sin\theta) dA = \cos\theta \int_A x\,dA + \sin\theta \int_A y\,dA = G_y\cos\theta + G_x\sin\theta \qquad (7.20)$$

断面 2 次モーメント

新座標に対する断面 2 次モーメントは

$$I_u = \int_A v^2 dA, \quad I_v = \int_A u^2 dA, \quad I_{uv} = \int_A uv dA \qquad (7.21)$$

式(7.21)に式(7.17)を代入すると，次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} I_u &= I_x\cos^2\theta + I_y\sin^2\theta - I_{xy}\sin 2\theta = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta \\ I_v &= I_x\sin^2\theta + I_y\cos^2\theta + I_{xy}\sin 2\theta = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta \\ I_{uv} &= \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \end{aligned}\right\} \qquad (7.22)$$

この式は逆に次のように書ける．

$$\left.\begin{aligned} I_x &= I_u\cos^2\theta + I_v\sin^2\theta + I_{uv}\sin 2\theta = \frac{I_u + I_v}{2} + \frac{I_u - I_v}{2}\cos 2\theta + I_{uv}\sin 2\theta \\ I_y &= I_u\sin^2\theta + I_v\cos^2\theta - I_{uv}\sin 2\theta = \frac{I_u + I_v}{2} - \frac{I_u - I_v}{2}\cos 2\theta - I_{uv}\sin 2\theta \\ I_{xy} &= -\frac{I_u - I_v}{2}\sin 2\theta + I_{uv}\cos 2\theta \end{aligned}\right\} \qquad (7.23)$$

上式の第 1 式と第 2 式を加えると

$$I_u + I_v = I_x + I_y = \text{一定}$$

この式は一組の直交軸に対して 1 対の 2 次モーメントを求めたときは，原点を同一とした場合その和は一定であることを示している．この和を I_p で表し，図形の座標原点に対する極 2 次モーメントという（前出）．

［**問題 7.6**］式(7.21)に式(7.17)を代入して式(7.22)を求めよ．
［**問題 7.7**］式(7.22)から式(7.23)を求めよ．

注）$\sin(-\theta) = -\sin\theta,\ \cos(-\theta) = \cos\theta$

7.5.3　主軸

相乗モーメントが 0 になるような直交軸を，与えられた図形の主軸という． 原点は図心にとる．

図形が対称軸をもつ場合は，その軸とこれに直交する軸が図形の主軸となる．

図形が対称軸をもたない場合，図心を通る軸 x,y を θ だけ回転した位置に主軸 X，Y があるとすると，式(7.22)の第 3 式を $I_{uv}=0$ と置き，次式よりその方向を求める．

$$\tan 2\theta = -\frac{I_{xy}}{\dfrac{I_x - I_y}{2}} \tag{7.24}$$

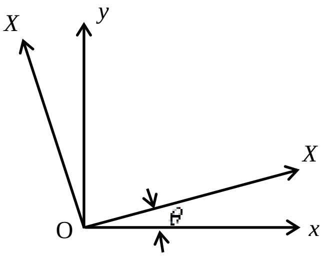


図 7.34

この主軸に対して求めた断面 2 次モーメントを，**断面主 2 次モーメント**といい，I_1, I_2 で表す．I_1 を第 1 主軸，I_2 を第 2 主軸といい，次式のように与えられる．

$$\left.\begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix}\right\} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \tag{7.25}$$

この式においても

$$I_1 + I_2 = I_x + I_y$$

が成り立つ．

［**問題 7.8**］式(7.24)を式(7.22)の第 1,2 式に適用して式(7.25)を求めよ．

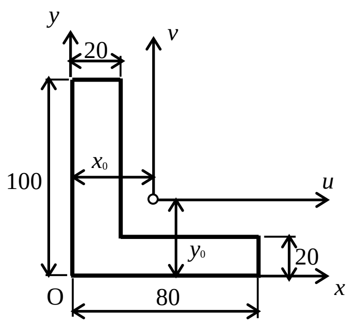
［**問題 7.9**］次の図形について問に答えよ．

(1)　図心位置 (x_0, y_0) を求めよ．

(2)　I_x, I_y, I_{xy} を求めよ．

(3)　I_u, I_v, I_{uv} を求めよ．

(4)　図心を通る主軸と断面主 2 次モーメントを求めよ．



［単位：mm］

図 7.35

注）式(7.22)において x,y を主軸とみなせば $I_{xy}=0$ となり，I_x, I_y は主 2 次モーメントとなる．これを I_1, I_2 で表して書き直せば次式のようになる．

$$\left.\begin{aligned} I_u &= I_1 \cos^2\theta + I_2 \sin^2\theta \\ I_u &= I_1 \sin^2\theta + I_2 \cos^2\theta \\ I_{uv} &= \frac{I_1 - I_2}{2} \sin 2\theta \end{aligned}\right\} \tag{7.26}$$

7.6　断面係数・断面 2 次半径・核点

7.6.1　断面係数

次式で表される量を**断面係数**と定義する.

$$W_c = \frac{I_x}{y_c}, \quad W_t = \frac{I_x}{y_t} \tag{7.27}$$

W_c　：上縁の断面係数
W_t　：下縁の断面係数
I_x　：図心軸 x に対する断面 2 次モーメント
y_c, y_t　：図心軸から上縁および下縁までの距離

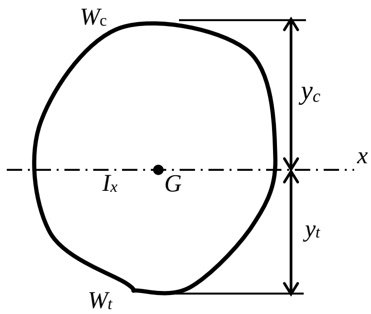


図 7.36

断面係数は曲げモーメントに抵抗する割合を表す.
単位［mm³］

7.6.2　断面 2 次半径（回転半径）

次式で表される量を**断面 2 次半径**と定義する.

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{7.28}$$

単位［mm］

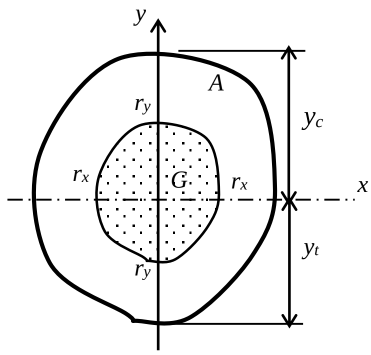


図 7.37

7.6.3　核点

次式で表される量を**核点**と定義する.

$$K_t = \frac{W_c}{A}, \quad K_c = \frac{W_t}{A} \tag{7.29}$$

単位［mm］

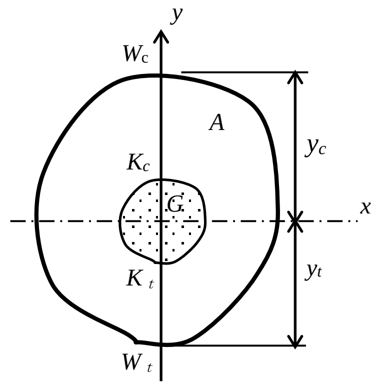


図 7.38

［**問題 7.10**］次の問に答えよ.

(1)　次の図形の x 軸に対する断面係数・断面 2 次半径・核点を求めよ.

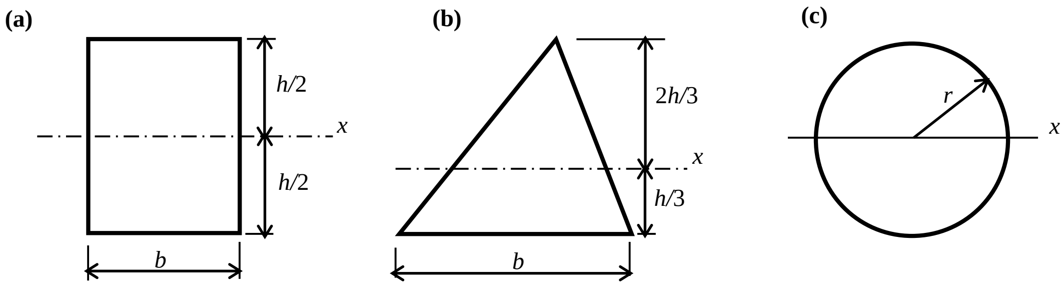


図 7.39

(2)　次の図形の x 軸に対する断面係数・断面 2 次半径・核点を求めよ.

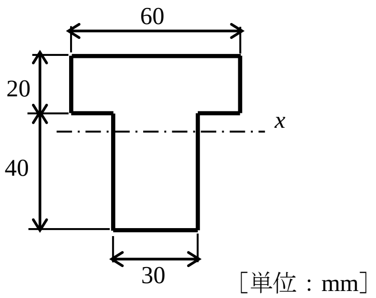


図 7.40

(3)　次の図形の図心軸 x に対する断面係数を求めよ.

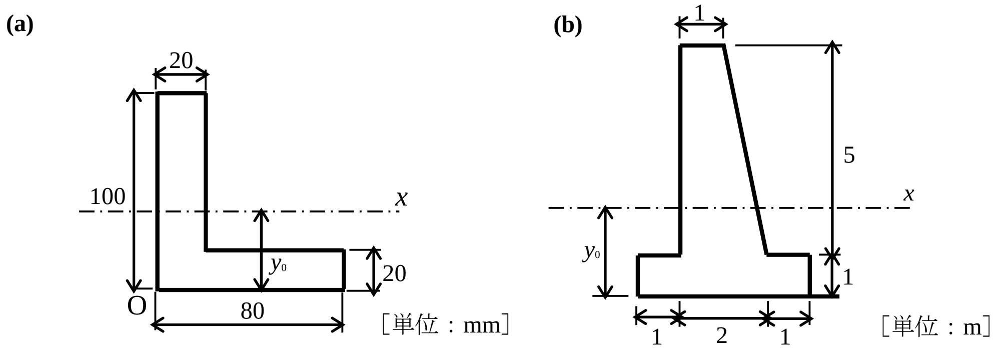


図 7.41

(4)　次図の x, y 軸に対する断面 2 次半径を求めよ.

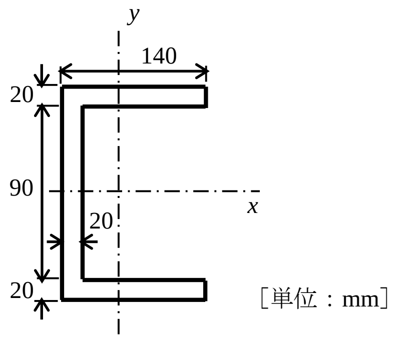


図 7.42

［**例題 7.20**］次の図形について問に答えよ.

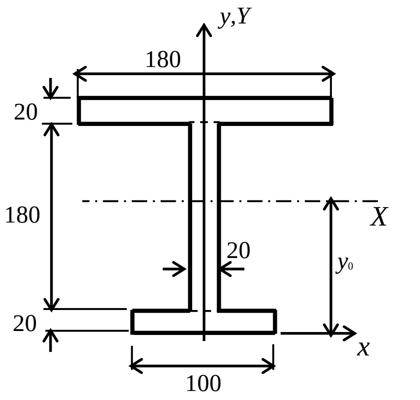


図 7.43

(1) 断面 2 次モーメント I_x, I_y を求めよ.

$$I_x = \frac{180\times20^3}{12} + 180\times20\times210^2 + \frac{20\times180^3}{12} + 20\times180\times110^2 + \frac{100\times20^3}{12} + 100\times20\times10^2 = 21242.67\times10^4\,(\mathrm{mm}^4)$$

$$I_y = \frac{20\times180^3}{12} + \frac{180\times20^3}{12} + \frac{20\times100^3}{12} = 1150.67\times10^4\,(\mathrm{mm}^4)$$

(2) 図心位置 y_0 を求めよ

$$y_0 = \frac{180\times20\times210 + 180\times20\times110 + 100\times20\times10}{180\times20\times2 + 20\times100} = 127.4(\mathrm{mm})$$

(3) I_X, I_Y を求めよ.

$$I_X = I_x - y_0^2 A = 21242.67\times10^4 - 127.4^2\times(180\times20\times2+100\times20) = 6310.37\times10^4\,(\mathrm{mm}^4)$$

$$I_Y = I_y = 1150.67\times10^4\,(\mathrm{mm}^4)$$

(4) 断面 2 次半径 r_X, r_Y を求めよ.

$$r_X = \sqrt{\frac{I_X}{A}} = \sqrt{\frac{6310.37\times10^4}{9\,200}} = 82.8(\mathrm{mm})$$

$$r_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{1150.67\times10^4}{9\,200}} = 35.4(\mathrm{mm})$$

(5) X 軸に関する断面係数 W_c, W_t を求めよ.

$$W_c = \frac{I_X}{y_c} = \frac{6310.37\times10^4}{220-127.4} = 681.47\times10^3\,(\mathrm{mm}^3)$$

$$W_t = \frac{I_X}{y_t} = \frac{6310.37\times10^4}{127.4} = 495.32\times10^3\,(\mathrm{mm}^3)$$

(6) Y 軸に関する断面係数 W を求めよ.

$$W = \frac{I_Y}{B/2} = \frac{1150.67\times10^4}{90} = 127.85\times10^3\,(\mathrm{mm}^3)$$

(7) 格点を求めよ.

$$K_c = \frac{W_t}{A} = \frac{495.32\times10^3}{9\,200} = 53.8(\mathrm{mm})$$

$$K_t = \frac{W_c}{A} = \frac{681.47\times10^3}{9\,200} = 74.1(\mathrm{mm})$$

$$K = \frac{W}{A} = \frac{127.85\times10^3}{9\,200} = 13.9(\mathrm{mm})$$

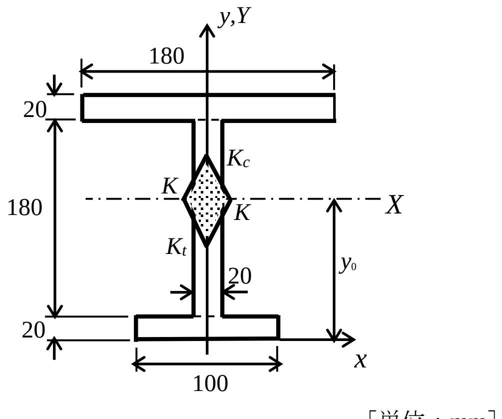


図 7.44

［例題 7.19］曲げを受ける鉄筋コンクリートT形断面の図心位置および図心軸対する断面2次モーメントを求めよ.

［解］鉄筋コンクリート断面は通常ウエッブ部分を無視して考える．したがって，フランジと鉄筋の換算断面積の部分の合成図形として図心位置を求めればよい.

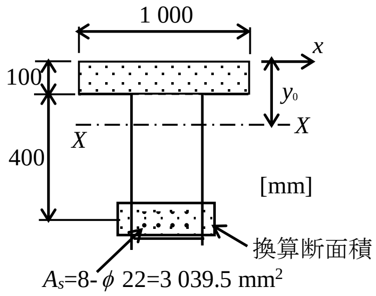


図 7.45 換算断面積

1)　図心位置を求める.

フランジ：

断面積　A_c=1 000×100=1.0×10^{5}mm^2

x 軸に対する断面 1 次モーメント

$G_c=A_c y_c$=1.0×10^5×(－50)=－5.0×10^{6}mm^3

鉄筋：

鉄筋の断面積をコンクリートの断面積に換算する.

$A_c' = nA_s$ =15×3 039.5=45 592.5mm^2

x 軸に対する断面 1 次モーメント

$G_s = A_c' y_s$ =45 592.5×(－500)=－22.8×10^{6}mm^3

ゆえに図心位置は

$$y_0 = \frac{G}{A} = \frac{G_c + G_s}{A_c + A_s} = \frac{-(5.0+22.8)\times 10^6}{(1.0+0.455925)\times 10^5} = -\frac{278}{1.455925} = 190.9\ \text{mm}$$

2)　断面 2 次モーメントを計算する.

$$I_{Xc} = \frac{1\,000\times 100^3}{12} + (190.9-50)^2\times 1.0\times 10^5 = 20.68\times 10^8\ \text{mm}^4$$

I_{Xs}=(400－90.9)^2×45 592.5=43.56×10^{8}mm^4

$I_X=I_{Xc}+I_{Xs}$=64.24mm^2

ちょっと休憩［7－5］（換算断面積）

これまで重力単位で計算していたものを，SI 単位系で表すのはなかなか面倒なところがある．したがって，ここでは SI 単位を表記する場合は，下表のように重力単位に**換算係数** g_c(=9.81N)を付記して用い，実際の数値計算はこの数値を代入して計算することとする.

	重力単位	SI 単位
鋼材の弾性係数	E_s=2.1×10^{4}kgf/mm^2	E_s=2.1×10^4 g_cN/mm
コンクリートの弾性係数	E_c=1.4×10^{3}kgf/mm^2	E_c=1.4×10^3 g_cN/mm

換算断面積

鉄筋とコンクリートの弾性係数を E_s，E_c とすると

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2.1\times 10^4 g_s}{1.4\times 10^3 g_c} = 15$$

これを用いて**鉄筋の断面積をコンクリートの断面積(あるいは逆)に換算する**ことができる.

鉄筋→コンクリート　　$A_c' = nA_s$

コンクリート→鉄筋　　$A_s' = A_c / n$

これらを**換算断面積**と言う.

注) この換算係数を使わずに直接換算断面積を求めてよいことは勿論である.