6　はりの影響線

6.1　はりの影響線

「任意点の断面力を単位集中荷重 *P*=1 の作用位置で表し，単位集中荷重 *P*=1 を移動させてその縦距を連ねた線」を影響線という． ここに，断面力は反力，せん断力，曲げモーメントを意味する．

6.1　単純ばりの影響線

影響線を単純ばりを例にとって考える．

6.1.1　反力影響線

たとえば下図において，反力 R_A は $P=1$ が A 点にきたときは R_A=1，C 点（中点）にきたときは R_A=0.5，B 点にきたときは R_A=0 である．これらの点を連ねた線は図に示すような直線となり，これが R_A 影響線である（図(b)）．これを略して R_A-line と書く．

解析的には，いま，**単位荷重が左支点から x のところにあるとすると**，このとき反力 R_A は

$$\sum M_B = 0 \quad より \quad R_A = 1 - \frac{x}{l} \tag{6.1}$$

この式で，$x=0$ のとき $R_A=1$，$x=0.5l$ のとき $R_A=0.5$，$x=l$ のとき $R_A=0$ となり，反力 R_A は先に描いた直線と一致することが分かる．

いまの荷重位置における R_A の大きさは，荷重直下の縦距 y で表される．

同様に R_B-line は

$$\sum M_A = 0 \quad より \quad R_B = \frac{x}{l} \tag{6.2}$$

となり，図(c)のようになる．

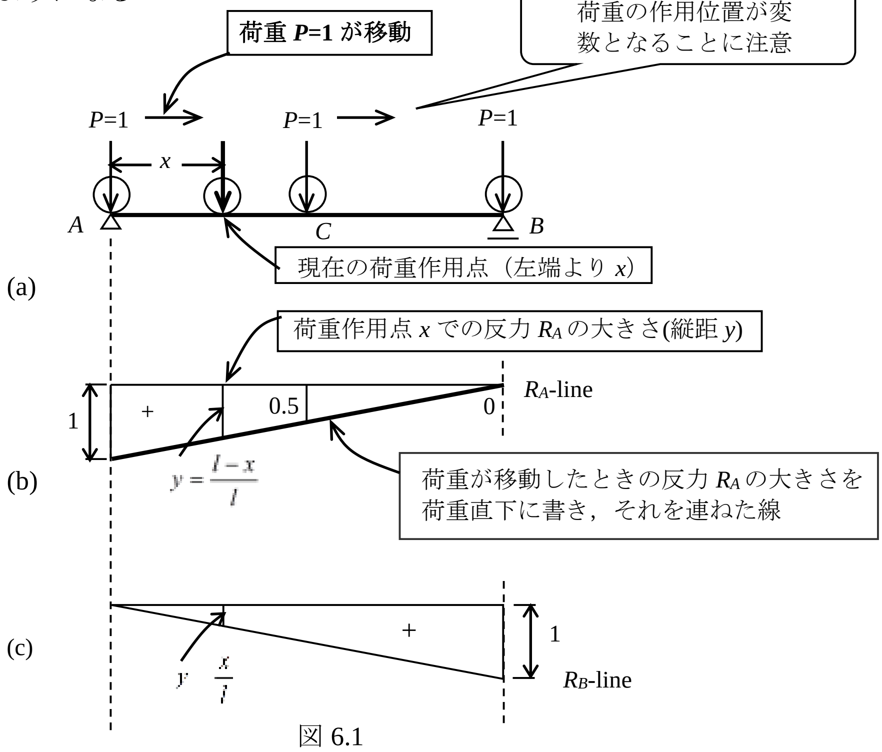


図 6.1

6.1.2　せん断力影響線 (Q_C-line)

指定点 C のせん断力影響線を描く.

単位荷重の位置を左支点 A から x で示し，指定点を C (左支点より a の位置)とする(図(a)).

1) $a < x < l$ の場合：　$Q_C = R_A = 1 - \dfrac{x}{l}$　(6.3)

すなわち，この範囲では R_A -line がそのまま Q_C -line となる.

2) $0 < x < a$ の場合：　$Q_C = R_A - 1 = -\dfrac{x}{l} = -R_B$　(6.4)

すなわち，この範囲では R_B -line の符号を変えたものが Q_C -line となる．ゆえに，図(b)のような影響線を得る．2 本の平行線からなり C の所で不連続となることに注意.

6.1.3　曲げモーメント影響線 (M_C-line)

指定点 C の曲げモーメント影響線を描く.

単位荷重の位置を左支点 A から x で示し，指定点を C (左支点より a の位置)とする(図(a)).

1) $a < x < l$ の場合：　$M_C = R_A a = \left(1 - \dfrac{x}{l}\right) a$　(6.5)

すなわち，この範囲では R_A -line の縦距の a 倍にしたものが M_C -line となる.

2) $0 < x < a$ の場合：　$M_C = R_A a - 1 \cdot (a - x) = \dfrac{b}{l} x = R_B b$　(6.6)

すなわち，この範囲では R_B -line の縦距を b 倍にしたものが M_C -line となる．ゆえに，M_C -line は図(c)のように C 点で頂点をもつ三角形となる.

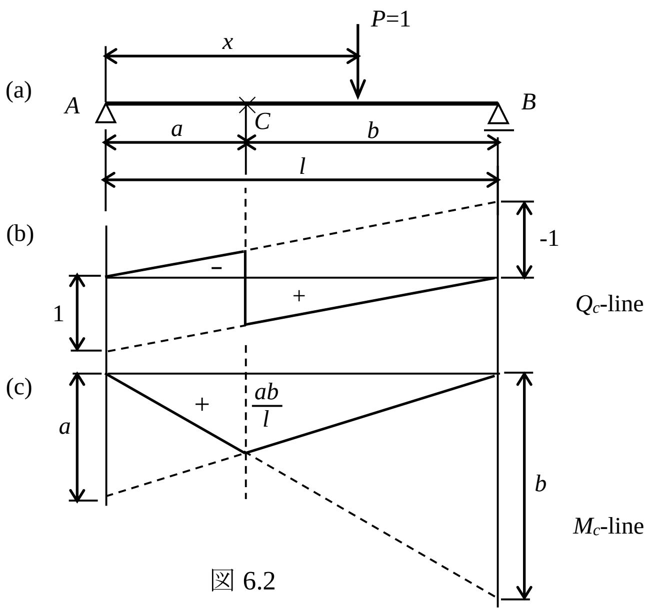


図 6.2

［**例題 6.1**］影響線を用いて次の単純ばりの反力 R_A ，R_B および Q_C ，M_C を求めよ．

1. まず，求めようとする inf. line を描き，その縦距を求める．
2. 大きさ P の単一集中荷重が作用するときは荷重直下の縦距 y を P 倍する．
   $$Z = P \cdot y$$
3. 多数の集中荷重があるときはその和をとる．
   $$Z = \sum_i P_i \cdot y_i$$
4. 等分布荷重が作用している場合には，荷重強度にその直下の inf. line の面積を掛ける．
   $$Z = q \cdot A$$

上式の Z は断面力 R_A, R_B, Q, M を示す．

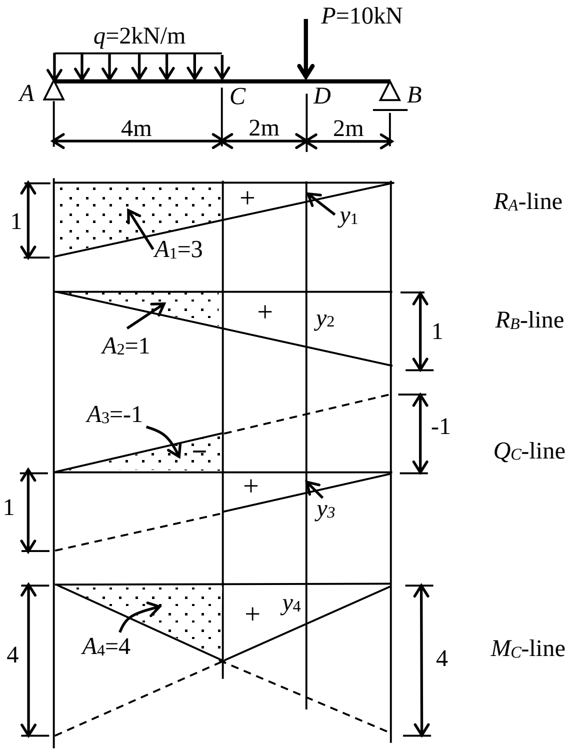


図 6.3

$$y_1 = \frac{2}{8}$$

$$R_A = P \cdot y_1 + q \cdot A_1 = 10 \times \frac{2}{8} + 2 \times 3 = 8.5\text{kN}$$

$$y_2 = \frac{6}{8}$$

$$R_B = P \cdot y_2 + q \cdot A_2 = 10 \times \frac{6}{8} + 2 \times 1 = 9.5\text{kN}$$

$$y_3 = \frac{2}{8}$$

$$Q_C = P \cdot y_3 + q \cdot A_3 = 10 \times \frac{2}{8} + 2 \times (-1) = 0.5\text{kN}$$

$$y_4 = \frac{8}{8}$$

$$M_C = P \cdot y_4 + q \cdot A_4 = 10 \times \frac{8}{8} + 2 \times 4 = 18\text{kNm}$$

［**問**］影響線を用いて Q_D, M_D を求めよ．

［答］ ${}_lQ_D = 0.5\text{kN}$, ${}_rQ_D = -9.5\text{kN}$, $M_D = 19\text{kNm}$

［**例題 6.2**］間接荷重ばりについて，R_A，R_B，Q_C，M_C の影響線を求めよ．

(1) 反力 R_A，R_B の影響線は直接荷重の場合と同じである．

(2) せん断力，曲げモーメント影響線　　指定点 C の属する径間を 1-2 とする．

荷重が径間 1-2 外にある場合：

Q_c-line も M_C-line も横張りの有無による影響は受けない．したがって，この径間外では両者はともに直接荷重の場合と一致する．

荷重が径間 1-2 間にある場合：　$R_A = \dfrac{l-x}{l}$，$R_B = \dfrac{x}{l}$

縦ばりの反力：$P_1 = 2 - \dfrac{x}{\lambda}$，$P_2 = \dfrac{x}{\lambda} - 1$

せん断力，曲げモーメント：

$$Q_c = R_A - P_1 = \frac{2x}{3\lambda} - 1, \qquad \left(x = \lambda : Q_c = -\frac{1}{3},\ x = 2\lambda : Q_c = \frac{1}{3} \right)$$

$$M_c = R_A a - P_1 c = \left(1 - \frac{x}{l}\right) a - \left(2 - \frac{x}{\lambda}\right) c, \qquad \left(x = \lambda : M_c = \lambda - \frac{a}{3} = \frac{b}{3},\ x = 2\lambda : M_c = \frac{a}{3} \right)$$

これを図に描くと図(b),(c)のようになる．

結局，指定点 C の属する径間の影響線を描くには，直接荷重の影響線を描き，これと径間の両側から下ろした線との交点を直線で結べばよい．

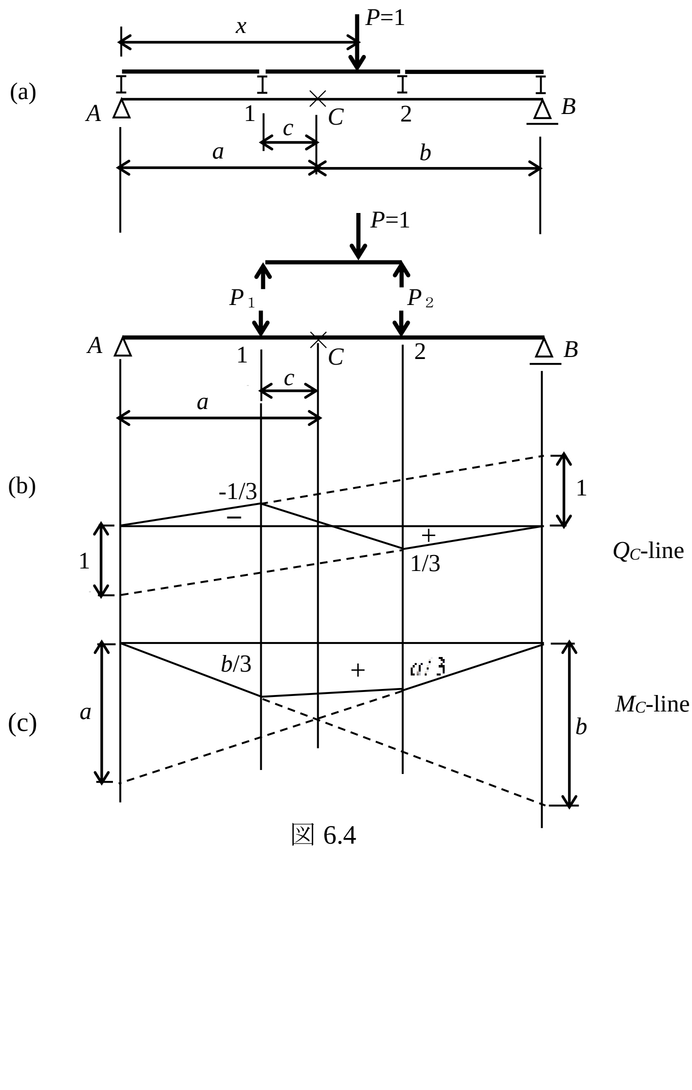


図 6.4

［例題 6.3］ 次の各片持ばりの影響線を描け．

片持ばり(1)について計算式を示す．

反力影響線： $R_A = 1, \quad M_A = -1 \cdot x$

せん断力，曲げモーメント影響線：

$a \le x \le l \;:\; Q_C = 1, \quad M_C = -x + a$

$0 \le x \le a \;:\; Q_C = 0, \quad M_C = 0$

注）右から考えると

$R_A = 1,\ M_A = -1 \cdot (l - x)$

$0 \le x \le b:\ Q_C = 1, \quad M_C = -1 \cdot (-a + x)$

$b \le x \le a:\ Q_c = 0, \quad M_C = 0$

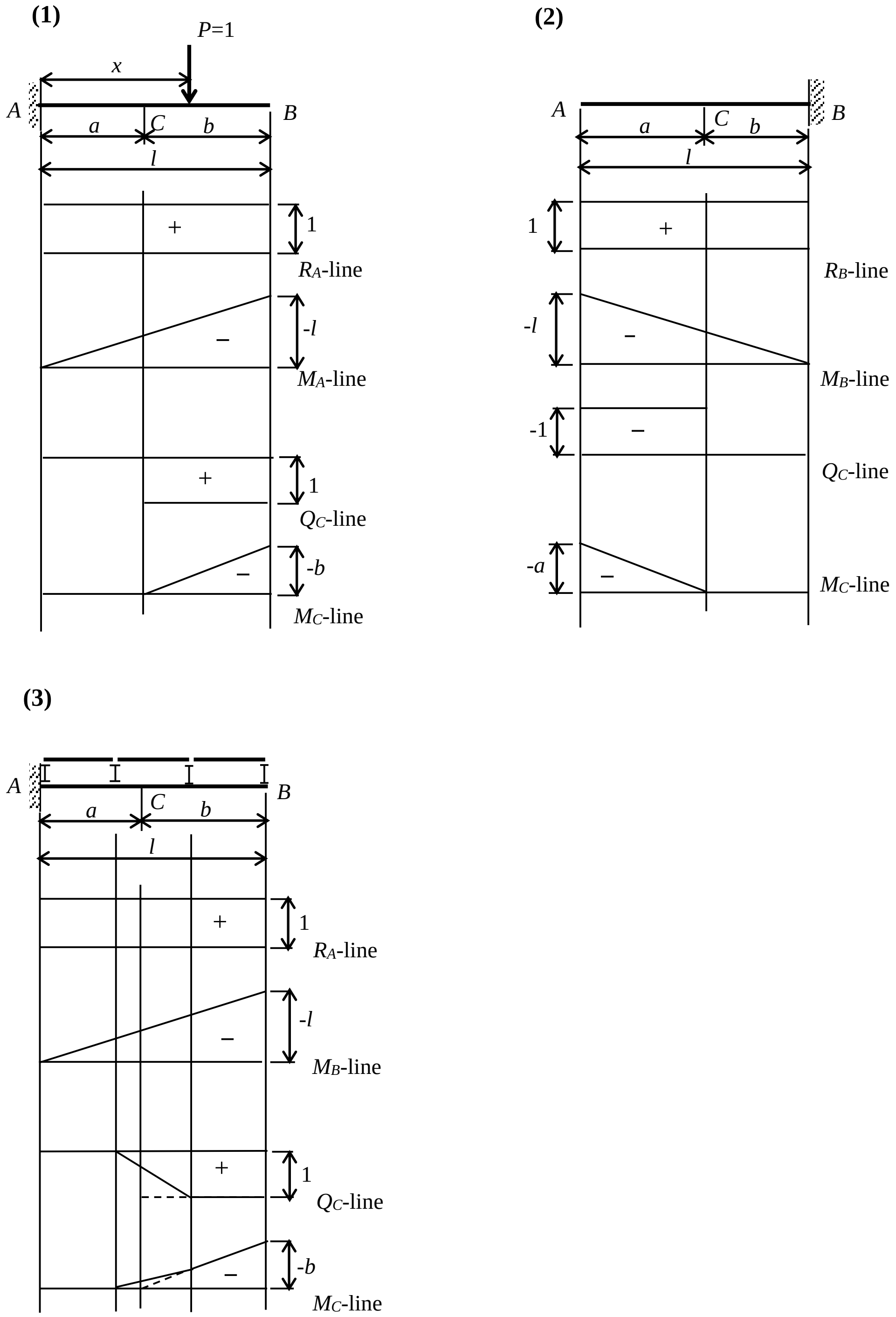


図 6.5

［**例題 6.4**］図の張出ばりの影響線を描け．

張出ばりの反力および中央支間の断面力の影響線は単純ばりの場合の影響線を描き，両側の片持スパンへそのままの勾配で延長する．

片持スパン内の指定点の断面力の影響線は片持ばりの場合に等しい．

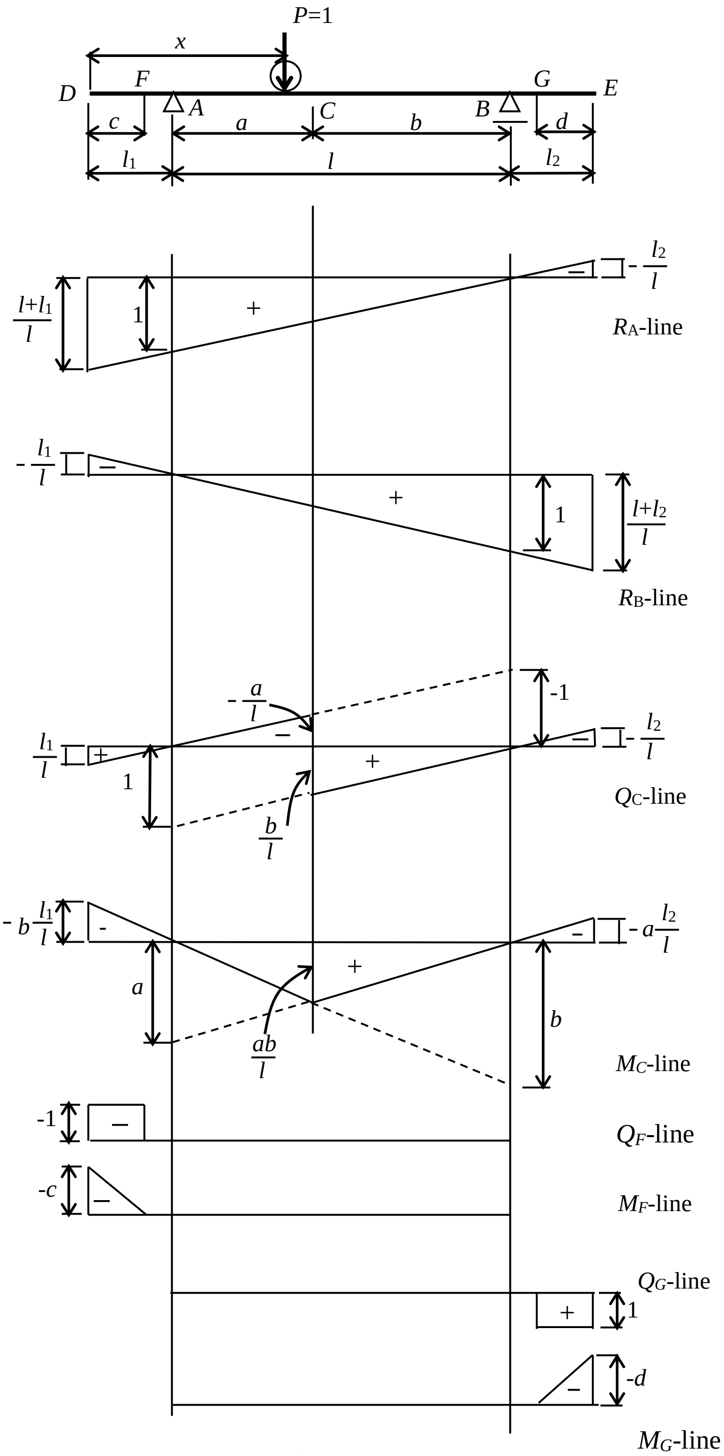


図 6.6

計算式：主な点の計算式を示す．

反力 R_A ： $\sum M_B = 0$ より次式を得る．

$$\left.\begin{aligned}
&0 \le x \le l_1, && R_A = \frac{l_1 + l - x}{l}\\
&l_1 \le x \le l + l_1, && R_A = \frac{l_1 + l - x}{l}\\
&l_1 + l \le x \le l_1 + l + l_2, && R_A = \frac{l_1 + l - x}{l}
\end{aligned}\right\}$$

せん断力：

$$\left.\begin{aligned}
&0 \le x \le l_1 + a, \quad Q_c = R_A - 1 = \frac{l_1 - x}{l}\\
&l_1 + a \le x \le l_1 + l + l_2,\\
&\qquad\qquad Q_c = R_A = \frac{l_1 + l - x}{l}
\end{aligned}\right\}$$

曲げモーメント：

$$\left.\begin{aligned}
&0 \le x \le l_1 + a,\\
&\quad M_C = R_A a - 1(l_1 + a - x) = -\frac{l_1}{l} b + \frac{b}{l} x\\
&l_1 + a \le x \le l_1 + l + l_2,\\
&\quad M_C = R_A a = \frac{l_1 + l - x}{l} a
\end{aligned}\right\}$$

Q_F，M_F ：

$0 \le x \le c$，　$Q_F = -1$

$M_F = -1(c - x)$

［**例題 6.5**］次のゲルバーばりの影響線を描け.

釣スパン内の指定点の断面力の影響線は単位移動荷重が釣スパン内にあるときは単純ばりと同じで，他のスパンにあるときは影響しない.

定着スパンについては P=1 が釣スパンにある場合はヒンジを通してその影響が及ぶことに注意.

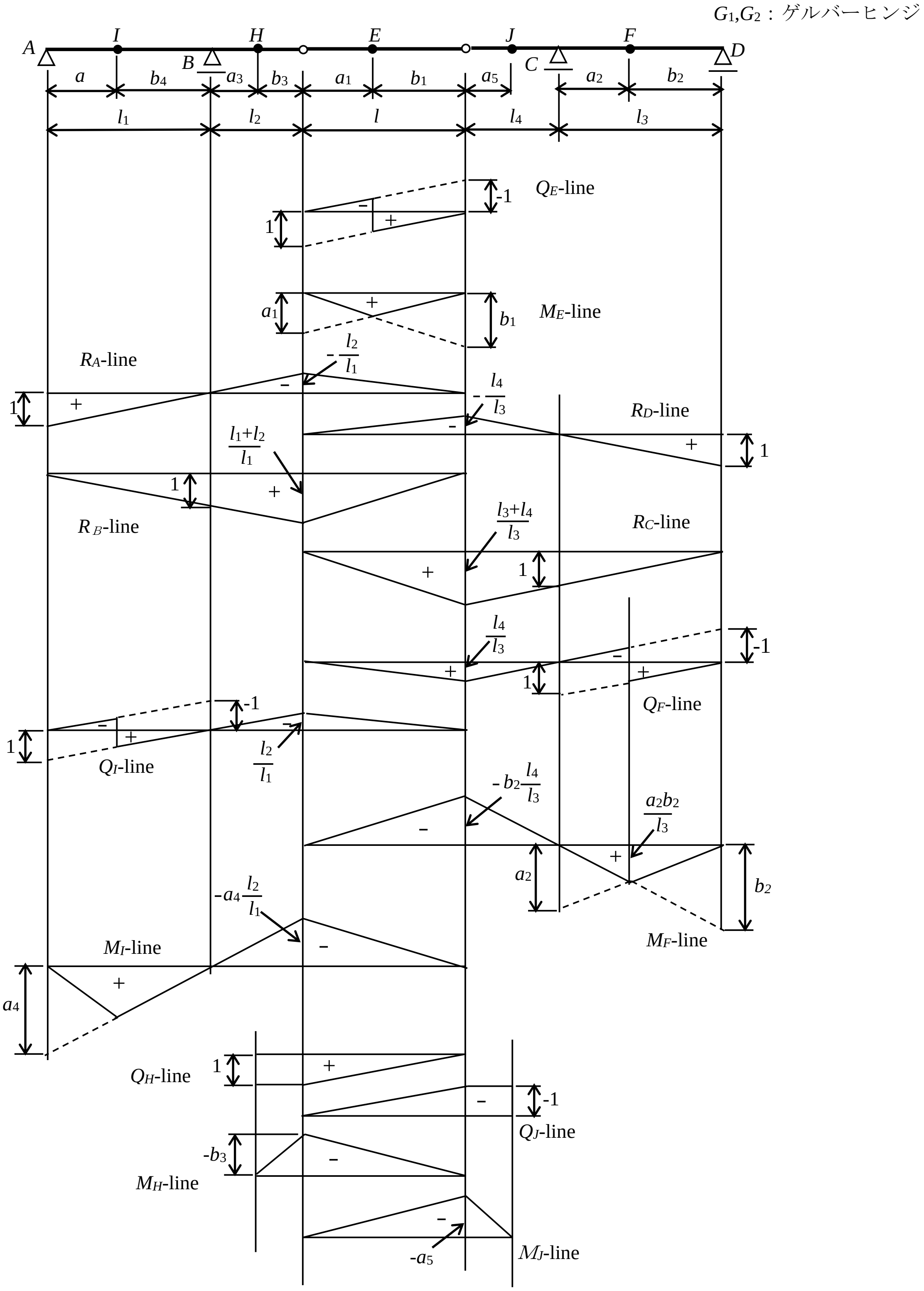


図 6.7

主な点の計算式を示す.

1) 釣スパンの影響線は単純ばりと同じである.
2) 定着スパンの反力，せん断力，曲げモーメントの影響線は
定着スパン部は張出ばりの影響線と同じ
釣スパン部はもう一方のヒンジG_2へすりつける.

反力R_A, R_B：　荷重が $l_1+l_2 \le x \le l_1+l_2+l$ の範囲にある場合を考える：

$$\sum M_{G_2}=0 \text{ より } R_{G_1}=1\cdot\frac{l_1+l_2+l-x}{l} \tag{a}$$

であるから

反力R_A：$\sum M_B=0$より

$$R_A=-\frac{l_2}{l_1}\frac{l_1+l_2+l-x}{l} \tag{b}$$

反力R_B：$\sum M_A=0$より

$$R_B=\frac{l_4+l_3}{l_{l4}}\frac{l_4+l_3+l-x}{l}$$

せん断力Q_I，曲げモーメントM_I：

$$\sum M_B=0 \text{ より } R_A=1-\frac{x}{l_1}$$

$$\left.\begin{array}{lll} 0\le x\le a_4, & Q_I=R_A-1=-\dfrac{x}{l_1}, & M_I=R_A-1(a_4-x)=\left(1-\dfrac{a_4}{l_1}\right)x \\ a_4\le x\le l_1+l_2, & Q_c=R_A=1-\dfrac{x}{l_1}, & M_I=R_A a_4=\left(1-\dfrac{x}{l_1}\right)a_4 \end{array}\right\}$$

$l_1+l_2\le x\le l_1+l_2+l$,　　式(a),(b)を用いて

$$Q_I=R_A=-\frac{l_2}{l_1}\frac{l_1+l_2+l-x}{l},\quad M_I=R_A a_4=-\frac{l_2}{l_1}a_4\frac{l_1+l_2+l-x}{l}$$

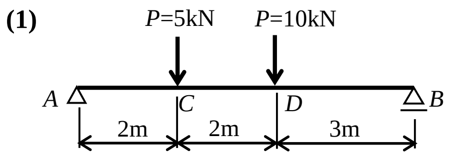
3) 片持部の影響線 Q_H, M_H：

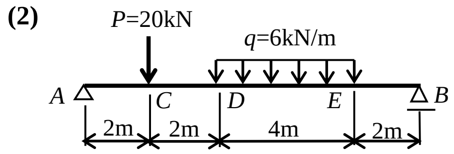
片持部の影響線は片持ばりの影響線と同じ
釣スパン部はもう一方のヒンジG_2へすりつける.

荷重が $l_1+l_2\le x\le l_1+l_2+l$ の範囲にある場合：

$$Q_I=R_{G_1}=\frac{l_1+l_2+l-x}{l},\quad M_I=-R_{G_1}b_3=-\frac{l_1+l_2+l-x}{l}b_3$$

［**問題 6.1**］影響線を用いて次の単純ばりの反力 R_A, R_B および Q_C, M_C を求めよ．





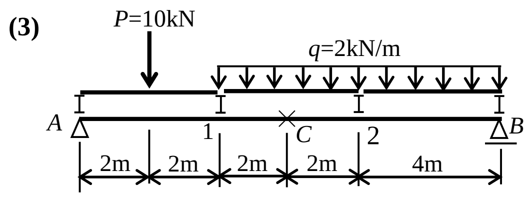
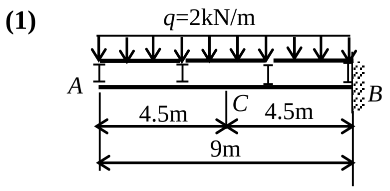


図 6.8

［**問題 6.2**］影響線を用いて次の片持ばりの反力 R_B, M_B および Q_C, M_C を求めよ．



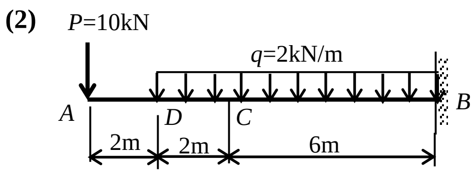


図 6.9

［**問題 6.3**］影響線を用いて次の張出ばりの反力 R_A, R_B および Q_C, M_C を求めよ．

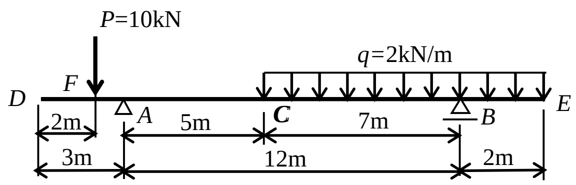


図 6.10

［**問題 6.4**］影響線を用いて次のゲルバーばりの反力 R_A, R_B, R_C および Q_D, M_D を求めよ.

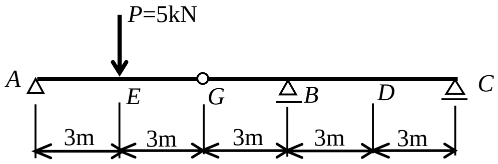


図 6.11

［**問題 6.5**］次のゲルバーばりについて影響線を用いて次の(1),(2),(3)の値を求めよ.

(1) R_A, R_B　**(2)** Q_E, M_E　**(3)** Q_F, M_F

ただし，$l = l_2 = l_4 = 8\text{m}$，$l_1 = l_3 = 4\text{m}$，$a_1 = a_2 = a_4 = 3\text{m}$，$b_1 = b_2 = b_4 = 5\text{m}$，$a_3 = b_3 = 2\text{m}$ とする.

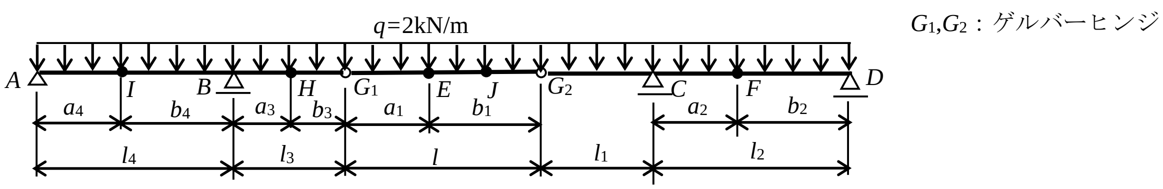


図 6.12

6.2　最大せん断力・最大曲げモーメント

6.2.1　最大せん断力

一般に**ある区間の荷重強度は荷重値をその区間で割ったもの［N/m］**である．たとえば，スパンlのはりに荷重$P_1, P_2, \cdots, P_n$が作用している場合の平均荷重強度q_mは

$$q_m = \frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}{l} = \frac{\sum P}{l}$$

また，荷重P_kの区間d_kに分布する荷重強度q_kは$q_k = \dfrac{P_k}{d_k}$である．

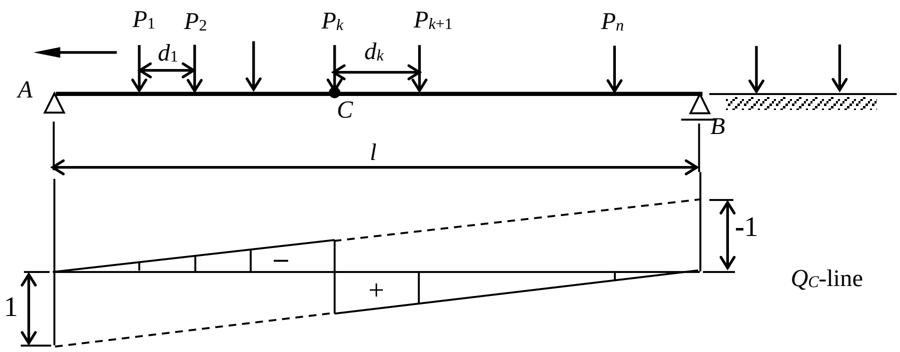


図 6.13

一般に，**点 *C* で最大せん断力となる条件は，一つの荷重が点 *C* に作用している状態で，荷重強度q_kが平均荷重強度q_mより大きいか等しいときに生じる**．すなわち

$$q_k \geq q_m \qquad \text{（最大せん断力の判別式）} \tag{6.7}$$

連行荷重がはりを出入りする場合、平均荷重強度q_mは変化するが，判別式が成り立てばその荷重状態で最大せん断力となる．荷重を順番に判別式にかけ，判別式が複数成り立つときはそれぞれについて検討し，最大せん断力を求めなければならない．

6.2.2　絶対最大せん断力

単純ばり上に多くの点をとり，各点のせん断力を求めるとそれらの間には大小の差がある．その中で最大なものを絶対最大せん断力という．絶対最大せん断力は点Cが支点に一致した場合と考え，上式を適用する．

［**例題 6.6**］図の連行荷重が移動するとき，点 C の最大せん断力を求めよ．

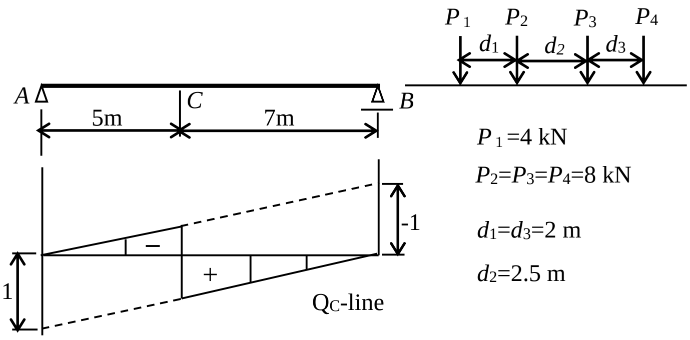


図 6.14

［**解**］平均荷重強度　$q_m = \dfrac{4+8+8+8}{12} = 2.33$ kN/m

各荷重が点 C にきたときの荷重強度 q_k と平均荷重強度との比較：

(1)　$q_1 = 4/2 = 2 < q_m$　　条件満たさない

(2)　$q_2 = 8/2.5 = 3.2 > q_m$　　条件満たす

(3)　$q_3 = 8/2 = 4 > q_m$　　条件満たす

これは次表のように判定するとわかりやすい．

P_i	d_i	q_k		q_m	条件
4	2	2	<	2.33	×
8	2.5	3.2	>	2.33	○
8	2	4	>	2.33	○
8					

したがって，(2),(3)の場合について Q_C を計算して大きい方をとる．

(2)：　$Q_C = 4\times\left(-\dfrac{3}{12}\right)+8\times\left(\dfrac{7}{12}\right)+8\times\left(\dfrac{4.5}{12}\right)+8\times\left(\dfrac{2.5}{12}\right)=\dfrac{100}{12}=8.34$ kN

(3)：　$Q_C = 4\times\left(-\dfrac{0.5}{12}\right)+8\times\left(-\dfrac{2.5}{12}\right)+8\times\left(\dfrac{7}{12}\right)+8\times\left(\dfrac{5}{12}\right)=\dfrac{74}{12}=6.17$ kN

これより P_2 が点 C にきたとき Q_C は最大になる．

［**例題 6.7**］図の連行荷重が移動するとき，点 C の最大せん断力を求めよ．

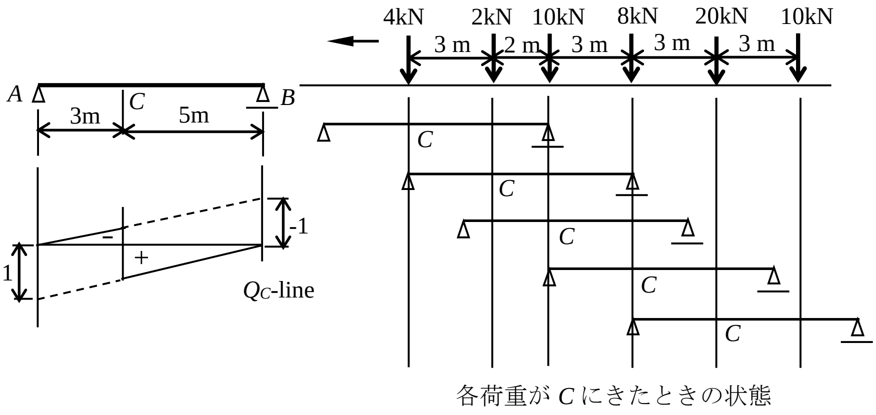


図 6.15

［**解**］左から順に荷重を $P_1, P_2, \cdots$，荷重間距離を $d_1, d_2, \cdots$ とする．多くの荷重がある場合や荷重がはりを出入りするときは，上図のようにはりを動かしたほうが分かりやすい．

	P_i	d_i	q_k		q_m	条件
1	4	3	1.33	<	2.00	×
2	2	2	1.00	<	3.00	×
3	10	3	3.33	>	2.50	○
4	8	3	2.67	<	4.75	×
5	20	3	6.67	>	4.75	○
6	10					

したがって，上表の 3，5 の場合について Q_C を計算して大きい方をとる．

3：　$$Q_C = 2\times\left(-\frac{1}{8}\right)+10\times\left(\frac{5}{8}\right)+8\times\left(\frac{2}{8}\right)=8\ \mathrm{kN}$$

5：　$$Q_C = 20\times\left(\frac{5}{8}\right)+10\times\left(\frac{2}{8}\right)=15\ \mathrm{kN}$$

これより P_5 が点 C にきたとき Q_C は最大になる．

6.2.3 最大曲げモーメント

区間 a の合力を R_a，区間 b の合力を R_b とする．最大曲げモーメント $M_{C\max}$ は

$$q_a = q_b = q_m \quad \text{すなわち} \quad \frac{R_a}{a} = \frac{R_b}{b} = \frac{R}{l} \tag{6.8}$$

の関係があるときに生じる．ここに，

$$q_a = \frac{R_a}{a} \text{：区間}a\text{の荷重強度，} \quad q_b = \frac{R_b}{b} \text{：区間}b\text{の荷重強度，} \quad q_m = \frac{R}{l} \text{：平均荷重強度} \tag{6.9}$$

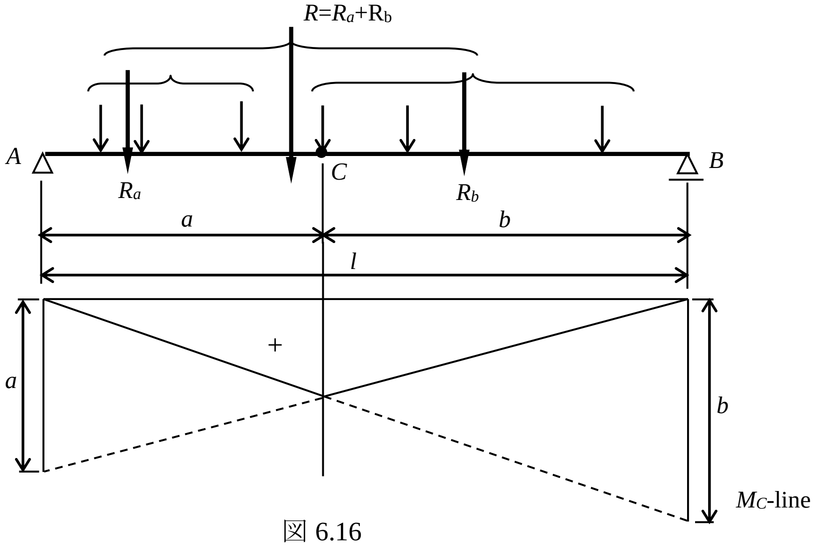


図 6.16

上図において

$$\frac{R_a}{a} > \frac{R_b}{b} \tag{6.10}$$

が成立する限り，M_c は増大する．この式において

1. 後から新しい荷重が進入したとすれば q_b はその荷重だけ増え， q_a には変化がない．
2. 先頭からスパン外へ出た荷重があれば， q_a はその荷重だけ減り， q_b には変化がない．
   結局，荷重の脱出，進入は式(6.8)には影響しない．
3. 一つの荷重が点 C を通って a 部に入った瞬間に, q_a はその荷重だけ増え, 反対に q_b はそれだけ減る．
   このとき不等号が変わり得る．
4. ゆえに，M_C が最大値をとるには，どれか一つの荷重が点 C に乗ることが必要である．
5. 荷重を順々に点 C に乗せて，式(6.10)の不等号の向きが変わるか否かを調べる．このときが $M_{C\max}$．
   式(2.12)は次のように変形して用いる．

$$\frac{R}{l} > \frac{R_a}{a} \tag{6.11}$$

点 C に乗る荷重は a 部に入ったものとして q_a に加えて調べること．

［**例題 6.8**］図の連行荷重が移動するとき，点 C の最大曲げモーメントを求めよ．

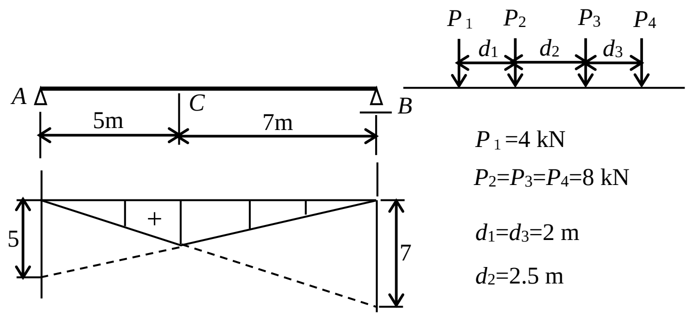


図 6.17

［解］ $\dfrac{R}{l} > \dfrac{R_a}{a}$ ： 平均荷重強度 $q_m = \dfrac{R}{l} = \dfrac{4+8+8+8}{12} = 2.33$ kN/m

P_1 が点 C にきたとき： $q_m = 2.33 > \dfrac{4}{5} = 0.8$

P_2 が点 C にきたとき： $q_m = 2.33 < \dfrac{12}{5} = 2.4$

したがって， P_2 が C にきたとき不等号が変わり，M_C が最大となる．表で表すと

点 C の荷重	P_i	r/l		R_a/a
1	4	2.33	>	0.8
2	8	2.33	<	2.4
3	8	2.33		
4	8			

区間 a には $R_a = \dfrac{a}{l} R$ だけ乗る必要がある．したがって

$$R_a = \frac{5}{12} \times 28 = 11.67 \quad \text{であるから}\ 11.67 - 4 = 7.67$$

P_2 の 8kN のうち 7.67kN だけ a 部に入ったとき M_C は最大になる．

$$M_C = 4 \times \left(3\frac{7}{12}\right) + 8 \times \left(5\frac{7}{12}\right) + 8 \times \left(4.5\frac{5}{12}\right) + 8 \times \left(2.5\frac{5}{12}\right) = 53.67 \text{ k N m}$$

［**例題 6.9**］図の等分布荷重が移動するとき，点 C に最大曲げモーメントを生じさせる荷重の位置と最大曲げモーメントを求めよ．

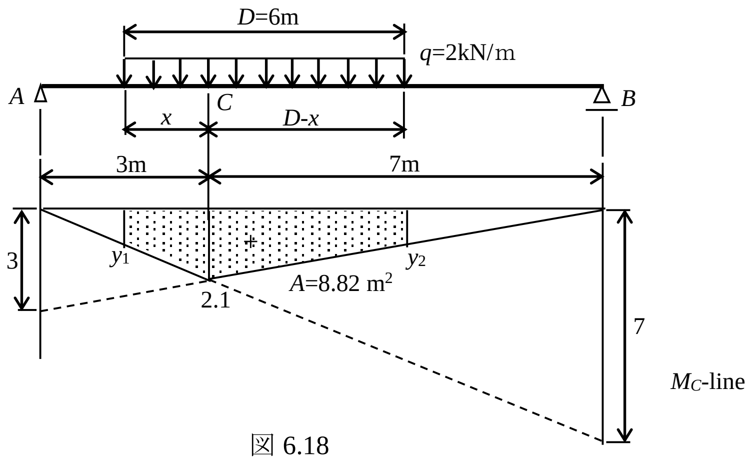


図 6.18

［**解**］最大曲げモーメントが生じる条件は $\dfrac{R}{l}=\dfrac{R_a}{a}=\dfrac{R_b}{b}$

幅 6m の等分布荷重が AC 間に x の部分，CB 間に $(6-x)$ の部分が作用すると仮定する．このとき

$$R_a = wx = 2x, \qquad R_b = w(D-x) = 2(6-x)$$

であるから

$$\frac{2x}{3}=\frac{2(6-x)}{7}$$

これより $x=1.8\mathrm{m}$ が得られる．このとき y_1 と y_2 の大きさは等しくなり $y_1 = y_2 = 0.84$ となる．

ゆえに

$$M_{C\max} = 2\times 8.82 = 17.64\mathrm{kN\,m}$$

このとき，

平均荷重強度 ： $q_m = \dfrac{R}{l} = \dfrac{6\times 2}{10} = 1.2\mathrm{kN/m}$

AC 間の荷重強度： $q_a = \dfrac{R_a}{a} = \dfrac{1.8\times 2}{3} = 1.2\mathrm{kN/m}$

CB 間の荷重強度： $q_b = \dfrac{R}{l} = \dfrac{14.2\times 2}{10} = 1.2\mathrm{kN/m}$

したがって，

$$q_a = q_b = q_m$$

となって条件を満足している．

［**例題 6.10**］図の等分布荷重が移動するとき，点 C に最大曲げモーメントを生じさせる荷重の位置と最大曲げモーメントを求めよ（例題 6.9 の一般形）．

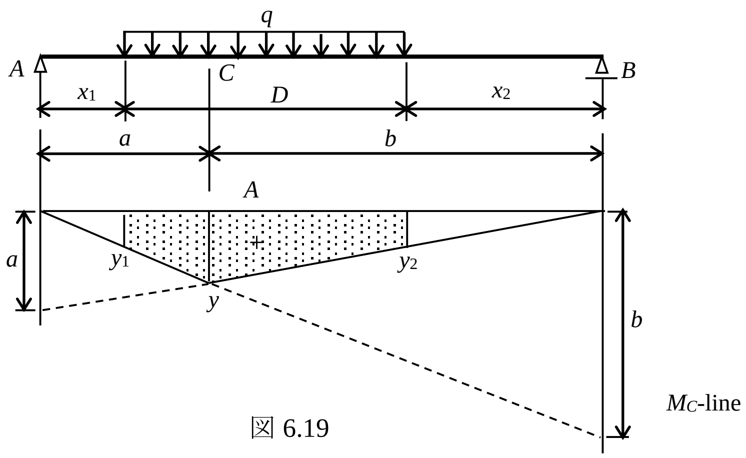


図 6.19

［**解**］点 C で最大曲げモーメントが生じる条件は $\dfrac{R}{l}=\dfrac{R_a}{a}=\dfrac{R_b}{b}$

幅 D の等分布荷重が AC 間に $(a-x_1)$ の部分，CB 間に $(b-x_1)$ の部分が作用すると仮定する．このとき

$$R_a=q(a-x_1),\quad R_b=q(b-x_2)$$

であるから $\dfrac{a-x_1}{a}=\dfrac{b-x_2}{b}$

これより $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{a}{b}$ または $\dfrac{x_1}{a}=\dfrac{x_2}{b}$ が得られる．これより

$$x_1=a\left(1-\frac{D}{l}\right),\quad x_2=b\left(1-\frac{D}{l}\right)$$

また，$y=\dfrac{ab}{l}$，$y_1=\dfrac{y}{a}x_1$，$y_2=\dfrac{y}{b}x_2$ であるから $\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{\frac{y}{a}x_1}{\frac{y}{b}x_2}=\dfrac{b}{a}\dfrac{x_1}{x_2}=1$

したがって $y_1=y_2$ となる．

荷重下の面積は $A_q=yD\left(1-\dfrac{1}{2}\dfrac{D}{l}\right)$

このとき，

平均荷重強度　　：$q_m=\dfrac{R}{l}=\dfrac{q\cdot D}{l}$，

AC 間の荷重強度：$q_a=\dfrac{R_a}{a}=\dfrac{q(a-x_1)}{a}=\dfrac{q\cdot D}{l}$

CB 間の荷重強度：$q_b=\dfrac{R_b}{b}=\dfrac{q(b-x_2)}{b}=\dfrac{q\cdot D}{l}$，

したがって，$q_a=q_b=q_m$ となる．

6.2.4　絶対最大曲げモーメント

はりの各点の最大曲げモーメントのうち最大なものを**絶対最大曲げモーメント**という．

区間 a の合力を R_a，はり全体の合力を R とする．最大曲げモーメント $M_{C\max}$ は

$$\frac{R_a}{a}=\frac{R}{l} \tag{6.12}$$

の関係があるときに生じる．このはりの荷重 P_k の作用点 C で最大曲げモーメントが生じるとすると，その点でせん断力は 0 とならなければならない．したがって

$$Q_C=R_A-R_a=\frac{Rb}{l}-R_a=0 \quad より \quad \frac{R}{l}=\frac{R_a}{b} \tag{6.13}$$

上 2 式より $a=b$ の関係が成り立つ．したがって図のように点 C に作用する荷重 P_k の作用点の 2 等分点をはりの中点に一致させたとき，荷重 P_k の作用点 C で絶対最大曲げモーメントが生じることになる．

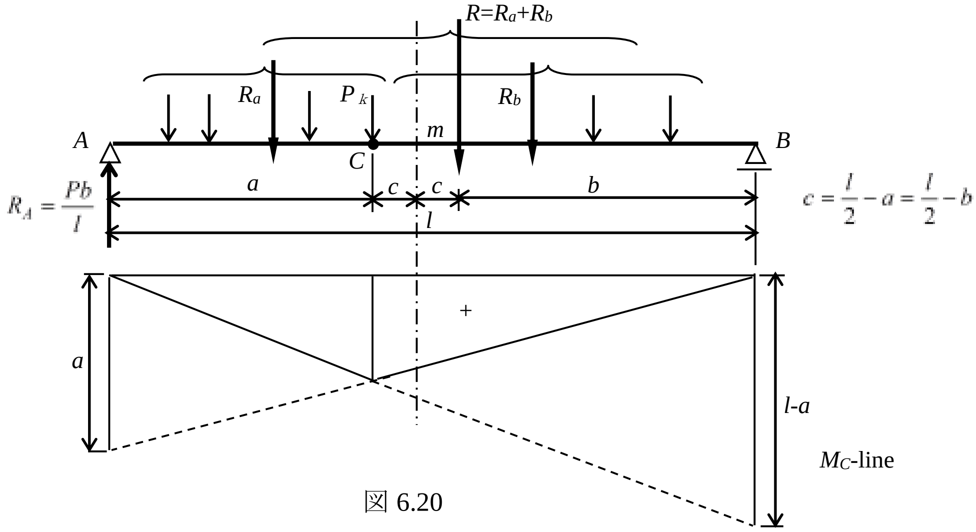


図 6.20

以上をまとめると絶対最大曲げモーメントを求める手順は次のようになる．

1. **はり上にできるだけ多くの荷重を乗せ，その合力 R の位置を求める．**
2. **合力 R に隣接する荷重 P_k と R との距離の中点がはりの中点に一致するように荷重位置を定める．**
3. **荷重 P_k の作用点 C の曲げモーメントを求めると，これが絶対最大曲げモーメントとなる．**

［**例題 6.11**］図の連行荷重がスパン 10m のはりを移動するとき，絶対最大曲げモーメントを求めよ．

合力と合力に近い荷重との 2 等分点をはりの中点に一致させれば，その荷重位置で絶対最大曲げモーメントが生じる．

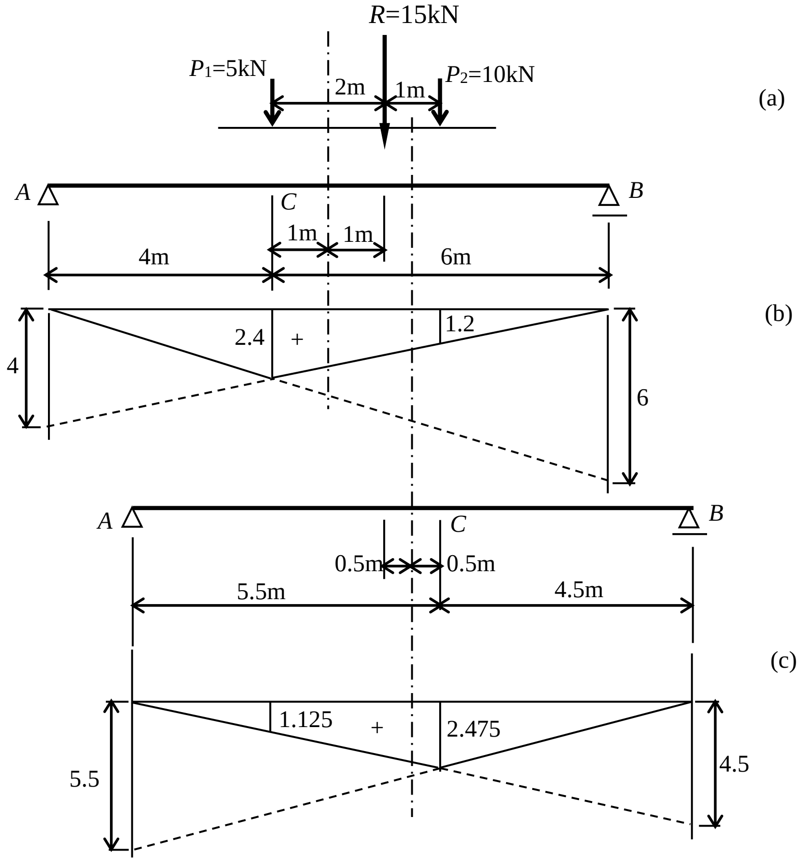


図 6.21

荷重を固定してはりを移動させると分かりやすい．

図(b)　：　$M_C = P_1 y_1 + P_2 y_2 = 5 \times 2.4 + 10 \times 1.2 = 24$ kNm

図(c)　：　$M_C = P_1 y_1 + P_2 y_2 = 5 \times 1.125 + 10 \times 2.475 = 30.4$ kNm

したがって，図(c)の場合が大きい．

このように絶対最大曲げモーメントの計算では，合力 R に隣接する荷重に対する曲げモーメントをそれぞれ計算し，そのうち大きい方を絶対最大曲げモーメントとする．

［例題 6.12］スパン 12m のはりに右図の連行荷重が移動するとき，絶対最大曲げモーメントを求めよ．

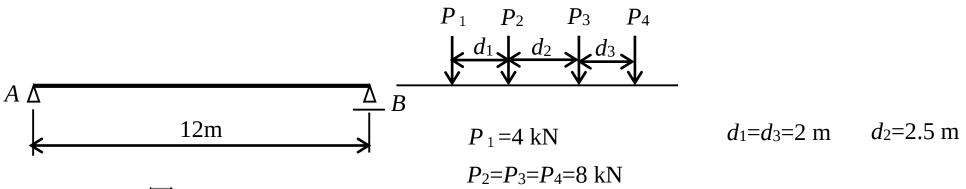
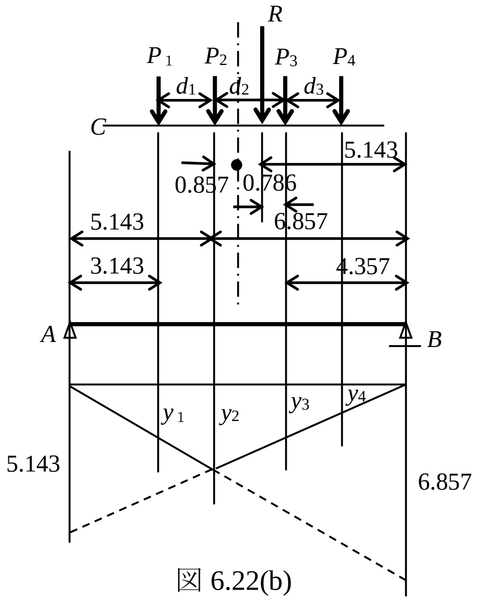


図 6.22(a)

［解］全荷重の合力は P_1 から右へ 3.714m のところにある．したがって，次の 2 通りの場合を考える．

(1) 合力と P_2 の中点がはりの中点と一致する場合

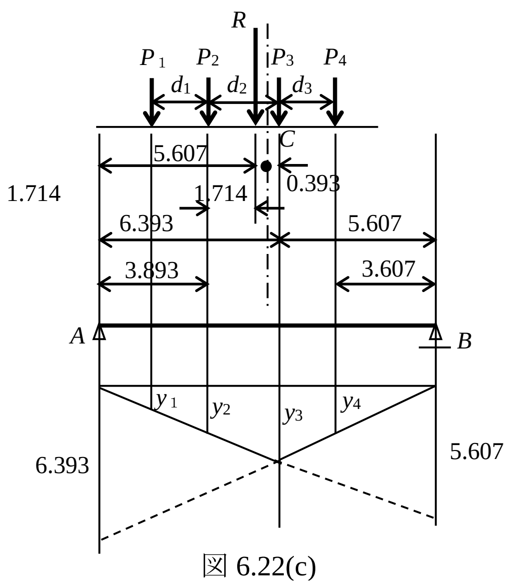


$$y_1=\frac{6.857}{12}\times 3.143=1.796$$
$$y_2=\frac{5.143}{12}\times 6.857=2.939$$
$$y_3=\frac{5.143}{12}\times 4.357=1.867$$
$$y_3=\frac{5.143}{12}\times 2.357=1.010$$

図 6.22(b)

$M_{max1}=4\times 1.796+8\times(2.939+1.867+1.010)$

(2) 合力と P_3 の中点がはりの中点と一致する場合



$$y_1=\frac{5.607}{12}\times 1.893=0.885$$
$$y_2=\frac{5.607}{12}\times 3.893=1.819$$
$$y_3=\frac{5.607}{12}\times 6.393=2.987$$
$$y_3=\frac{6.393}{12}\times 3.607=1.922$$

図 6.22(c)

$M_{max2}=4\times 0.885+8\times(1.819+2.987+1.922)$， よって，(2)の場合が大きい．

［例題 6.13］スパン 10m のはりに右図の連行荷重が移動するとき，次の問に答えよ．

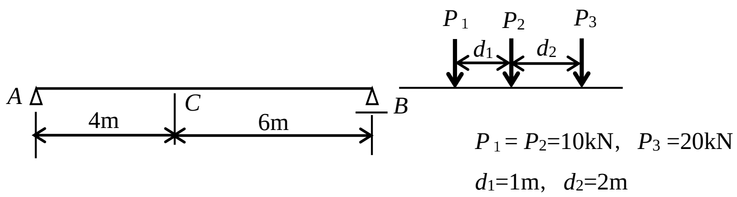


図 6.23(a)

(1)　点 C の最大せん断力を求めよ．
(2)　点 C の最大曲げモーメントを求めよ．
(3)　絶対最大曲げモーメントとそれが生じる荷重位置を求めよ．

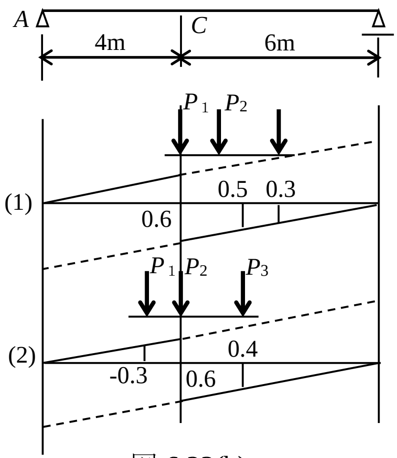


図 6.23(b)

［解］(1)　点 C の最大せん断力を求めよ．

平均荷重強度　$q_m = \dfrac{10+10+20}{10} = 4$　kN/m

各荷重が点 C にきたときの荷重強度 q_k と平均荷重強度との比較：

(1) P_1 が点 C にきたとき：$q_1 = 10/1 = 10 > q_m$　　条件満たす

(2) P_2 が点 C にきたとき：$q_2 = 10/2 = 5 > q_m$　　条件満たす

したがって，(1),(2)の場合について Q_C を計算して大きい方をとる．

(1)：　　$Q_C = 10\times\left(\dfrac{6}{10}\right) + 10\times\left(\dfrac{5}{10}\right) + 20\times\left(\dfrac{3}{10}\right) = 17$

(2)：　　$Q_C = 10\times\left(\dfrac{3}{10}\right) + 10\times\left(\dfrac{6}{10}\right) + 20\times\left(\dfrac{4}{10}\right) = 11$

これより P_1 が点 C にきたとき Q_C は最大になる．

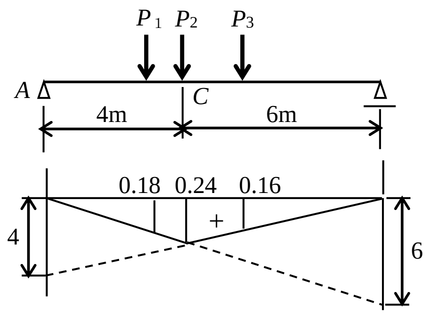


図 6.23(c)

(2)　点 C の最大曲げモーメントを求めよ．

$$q_m = \frac{R}{l} = \frac{10+10+20}{10} = 4\ \mathrm{kN/}$$

P_1 が点 C にきたとき：$q_m = 4 > \dfrac{10}{4} = 2.5$

P_2 が点 C にきたとき：$q_m = 4 < \dfrac{20}{4} = 5$

したがって，P_2 が点 C にきたとき不等号がかわり，M_C が最大となる．区間 a には $R_a = \dfrac{a}{l}R$ だけ乗る必要がある．したがって

$R_a = \dfrac{a}{l}R = \dfrac{4}{10}\times 40 = 16$ であるから　$16-6=10$

P_2 の 10kN のうち 6kN だけ AC 部に入ったとき M_C は最大になる．

$$M_C = 10\times\left(\frac{6}{10}\times 3\right) + 10\times\left(\frac{4}{10}\times 6\right) + 20\times\left(\frac{4}{10}\times 4\right) = 74$$

(3)　絶対最大曲げモーメントとそれが生じる荷重位置を求めよ.

合力に近い荷重との 2 等分点をはりの中央に一致させる．次の 2 通りがある.

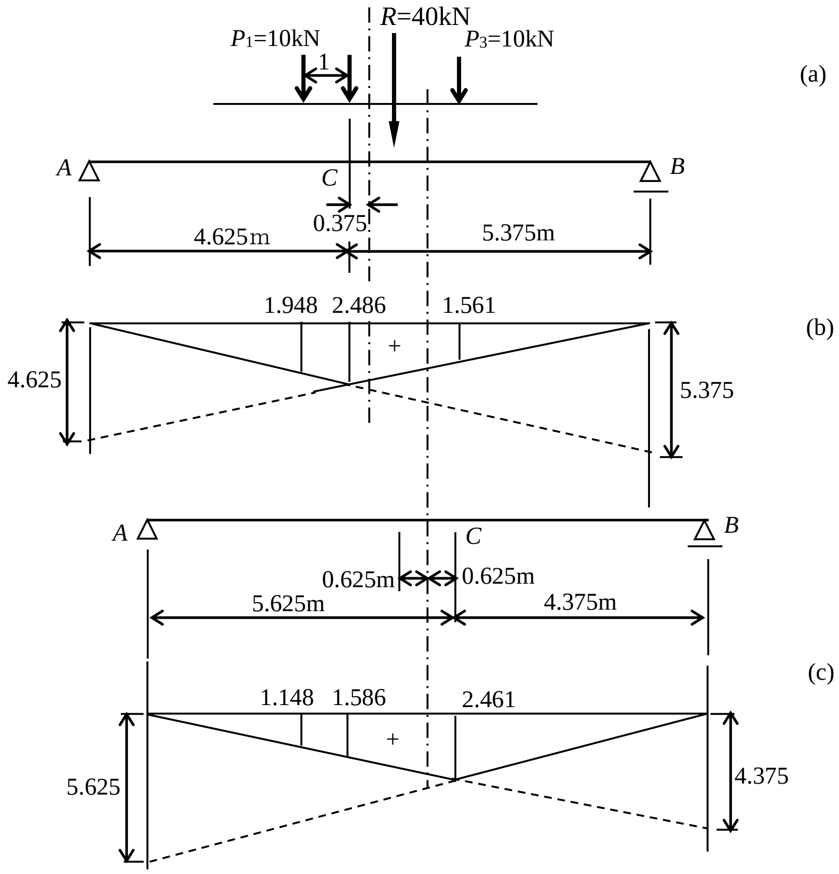


図 6.23(d)

上記 2 通りについて計算し大きい方をとる.

$$M_{1\,max}=10\times\frac{5.375}{10}\times3.625+10\times\frac{4.625}{10}\times5.375+20\times\frac{4.625}{10}\times3.375=7$$

$$M_{2\,max}=10\times\frac{4.375}{10}\times2.625+10\times\frac{4.375}{10}\times3.625+20\times\frac{4.375}{10}\times5.625=7$$

ゆえに，絶対最大曲げモーメントは図(c)の場合に生じその大きさは 76.56kNm である.

［例題 6.14］ スパン 10m のはりに，次の［問 1,2］の連行荷重が移動するとき，絶対最大曲げモーメントとそれが生じる荷重位置を求めよ.

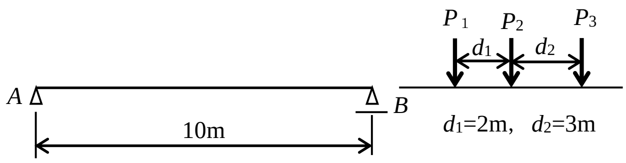


図 6.24(a)

［問 1］ $P_1 = P_2 = 2\text{kN},\ P_3 = 4\text{kN}$ の連行荷重が移動するとき.

［解］ 合力 R は P_1 から右へ 3m のところにある．したがって，次の 2 通りの場合を考える.

合力に近い荷重との 2 等分点をはりの中央に一致させる．次の 2 通りがある.

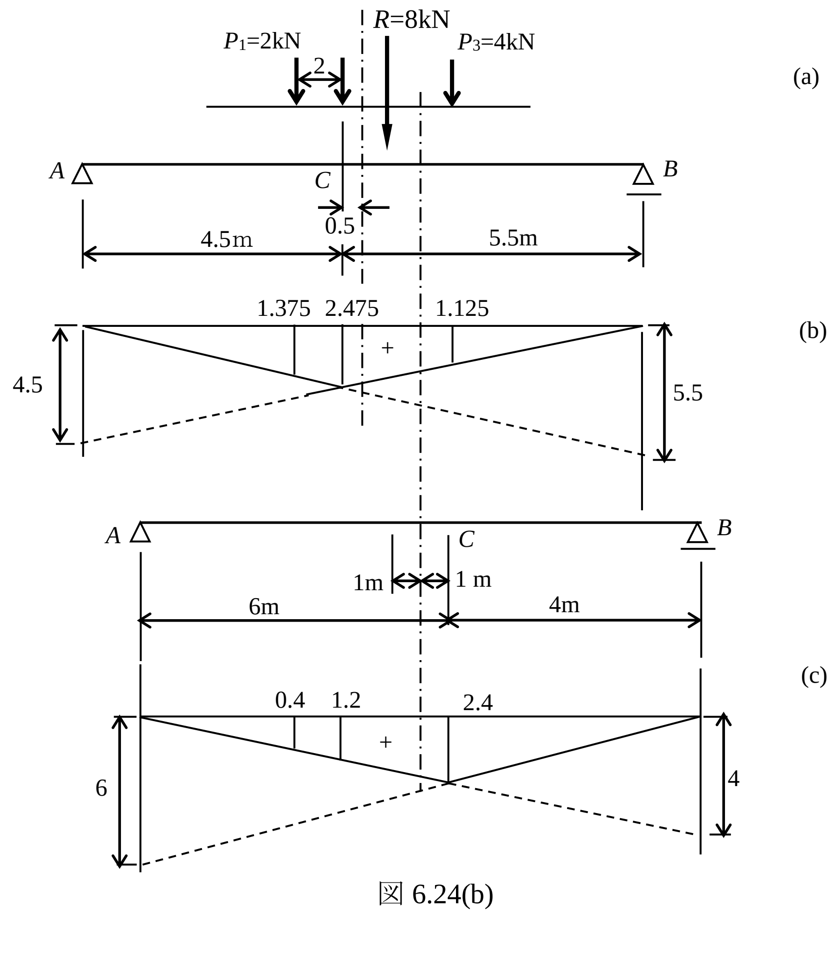


図 6.24(b)

上記 2 通りについて計算し大きい方をとる.

$$M_{1\max} = 2\times\frac{13.75}{10} + 2\times\frac{24.75}{10} + 4\times\frac{11.25}{10} = 12.2\text{k}$$

$$M_{2\max} = 2\times\frac{4}{10} + 2\times\frac{12}{10} + 4\times\frac{24}{10} = 12.8\text{k}$$

［答］ P_3 が A 点より右に 6m の所にきたとき， $M_{\max} = 12.8\text{kNm}$

［問 2］ $P_1 = P_2 = 3$kN, $P_3 = 4$kN の連行荷重が移動するとき．

［解］合力 R は P_1 から右へ 2.6m のところにある．したがって，次の 2 通りの場合を考える．

合力に近い荷重との 2 等分点をはりの中央に一致させる．次の 2 通りがある．

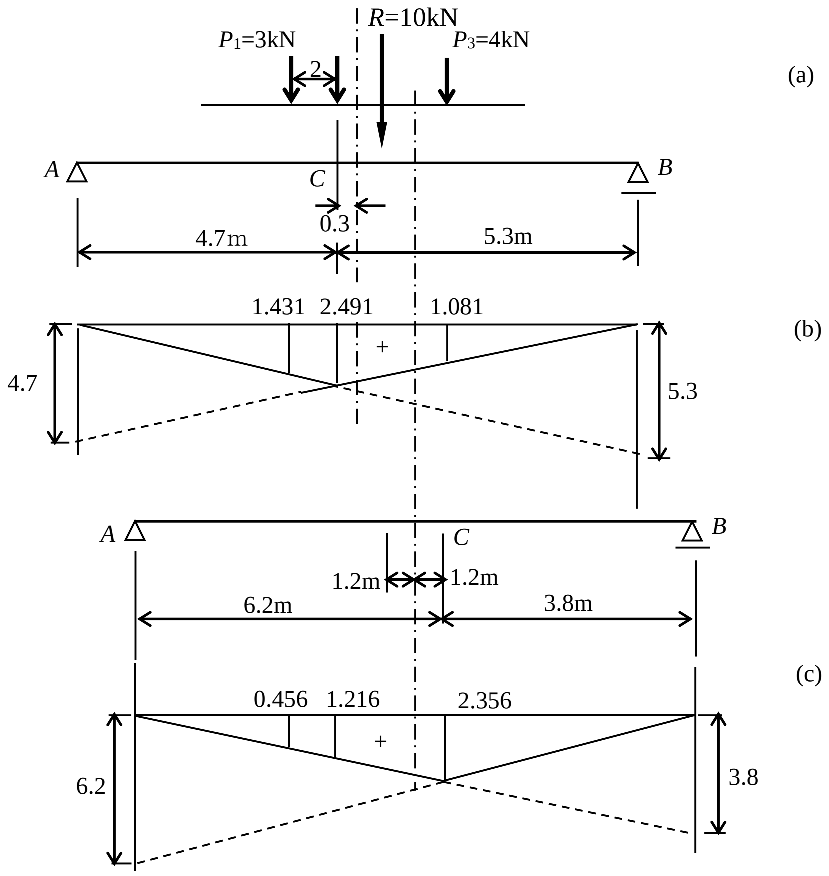


図 6.24(c)

上記 2 通りについて計算し大きい方をとる．

$$M_{1\,max} = 3 \times \frac{14.31}{10} + 3 \times \frac{24.91}{10} + 4 \times \frac{10.81}{10} = 16.09\mathrm{k}$$

$$M_{2\,max} = 3 \times \frac{4.56}{10} + 3 \times \frac{12.16}{10} + 4 \times \frac{23.56}{10} = 14.44\mathrm{k}$$

［答］ P_2 が A 点より右に 4.7m の所にきたとき， $M_{max} = 16.09$kNm