3　力の合成・分解

3.1　力

力を表すには，

　力の大きさ，　力が作用する点（作用点），　力の作用する方向

が必要である．これを**力の三要素**という．

また，力の作用点を通って力の方向を示す線を**作用線**，力の大きさを表す尺度を**力の縮尺**という．

［**例題 3.1**］座標（1, 1.5）の点 A に、x 軸と 30° の角度をなして，右上方へ向かって働く 5kN の力を示せ．

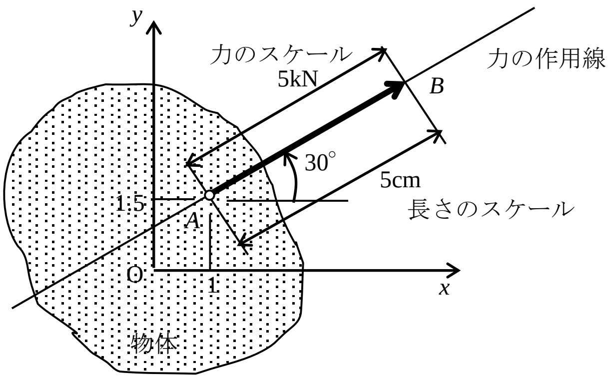


図 3.1

［解］

1)　作用点：座標軸 Ox，Oy を描き作用点 A を定める．

2)　作用線：点 A を通って x 軸と 30° の傾きをなす直線を引く．

3)　大きさ：たとえば 1cm を 1kN のスケールでとると，点 A から 5cm の点を B とすれば，AB が 5kN となる．

4)　向き　：A から B の方に矢印を付ける．

5)　方向　：基準線とのなす角 30° ．

注) 方向と向きを区別する場合もあるが，通常は単に方向といって向きも含める．

また，次の事項は力の作用を理解するうえで極めて大切である（図 3.2）．

「力はその作用線上をどこに移動しても力の効果は変わらない」

物体を作用線上で作用点 A_1 で引張っても，A_2 で引張っても，x 軸から 30° の方向に動く．

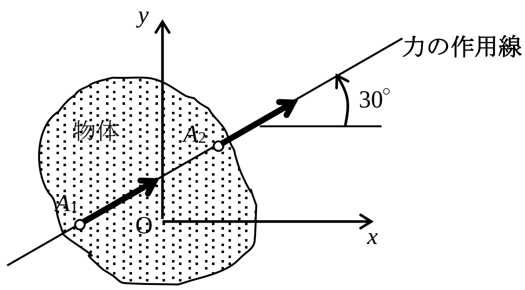


図 3.2

3.2　力の合成

構造物には，いろいろな方向から大きさの違う力が作用している．しかい，これでは扱いにくので，これらの力を集めて一つにすると考えやすくなる．

図形的に対処するためには、1 対の三角定規と定規，コンパス，分度器が必要である．数値計算で求めるには，三角関数の初歩で十分である．

3.2.1　1 点に作用する 2 力の合成

方法 1：力の平行四辺形

a)　図式解法：

1 点 O に作用する 2 力 P_1，P_2 の合力は平行四辺形の対角線が合力 R となる（▱OBDC を力の平行四辺形という）.

1) 与えられた力 P_1，P_2 を，力の縮尺で書く.
2) 力 P_1 に平行に CD，力 P_2 に平行に BD を引く.
3) 線分 OD が合力 R となる．OD の長さを力の縮尺で読み取る.
4) 向きは OD の向き．方向は分度器で∠BOD を読み取る.

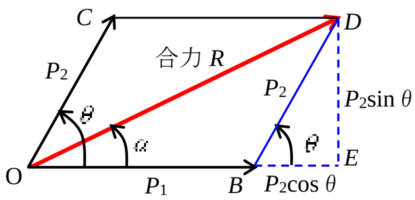


図 3.3

b)　計算方法：

三平方の定理より

$$\overline{OD}=\sqrt{\overline{OE}^2+\overline{ED}^2}=\sqrt{\left(\overline{OB}+\overline{BE}\right)^2+\overline{ED}^2}$$

$\overline{BD}$ すなわち力 P_2 の水平，垂直分力は

$$P_x=P_2\cos\theta,\quad P_y=P_2\sin\theta$$

であるから，上式に代入して合力は

$$R=\sqrt{(P_1+P_2\cos\theta)^2+(P_2\sin\theta)^2}=\sqrt{P_1^2+P_2^2+2P_1P_2\cos\theta} \tag{3.1}$$

方向は

$$\tan\alpha=\frac{P_2\sin\theta}{P_1+P_2\cos\theta} \tag{3.2}$$

方法 2：**力の三角形**

図式解法：

1) O 点から P_1 を引く.
2) P_1 の先端 B から P_2 に平行に BD を描く.
3) 始点 O から終点 D に線を引く．OD が合力 R である.
　(⊿ OBD を力の三角形という)
　数値計算法は力の平行四辺形の場合と同じである.

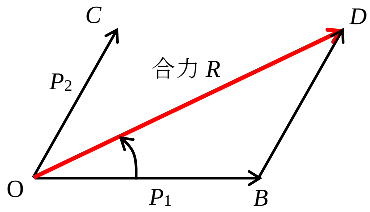


図 3.4

［**問題 3.1**］次の各図の合力の大きさと方向を求めよ.

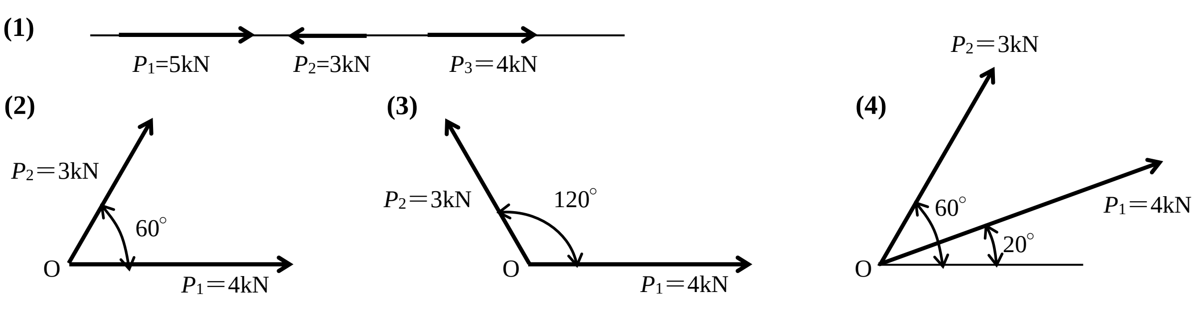


図 3.5

3.2.2　1 点に作用する多くの力の合成

1)　図式解法 1（前の方法 1 を利用する）．

P_1 と P_2 の合力 R_1 を求め，次に R_1 と P_2 の合力 R_2 を求める．以下順次この方法を続け，最後に合力 R を求める（図 3.6）．

2)　図式解法 2（力の多角形）

多数の力を，そのまま順次 P_1，P_2，P_3，…と多角形に連結し，原点と最後の力の先端を結ぶ．これが合力となる（図 3.7）．方向は始点から終点を結んだ向きである．これを力の多角形という．

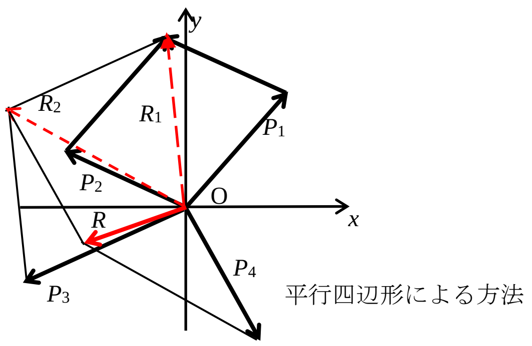


図 3.6

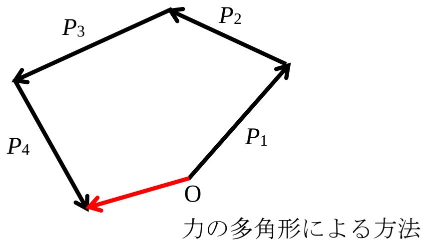


図 3.7

3)　計算による方法：

1. 各力を x 軸上の成分 H_i，y 軸上の成分 V_i に分解する．
$$H_i = P_i \cos\theta_i\,,\quad V_i = P_i \sin\theta_i \tag{3.3}$$
2. x 方向の和 H，y 方向の和 V を求める(象限による符号に注意).
$$H = \sum H_i\,,\quad V = \sum V_i \tag{3.4}$$
3. 合力：$R = \sqrt{H^2 + V^2}$　(3.5)
4. 方向：$\tan\alpha = \dfrac{V}{H}$　(3.6)

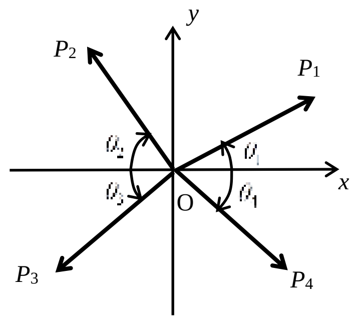


図 3.8

これは次のような表で計算すれば能率がよい．

荷　重	x 方向成分 (H_i)	y 方向成分 (V_i)
P_1		
P_2		
P_3		
…		
合 計		

［問題 3.2］次の各図の合力の大きさと方向を求めよ．

(1)　**(2)**

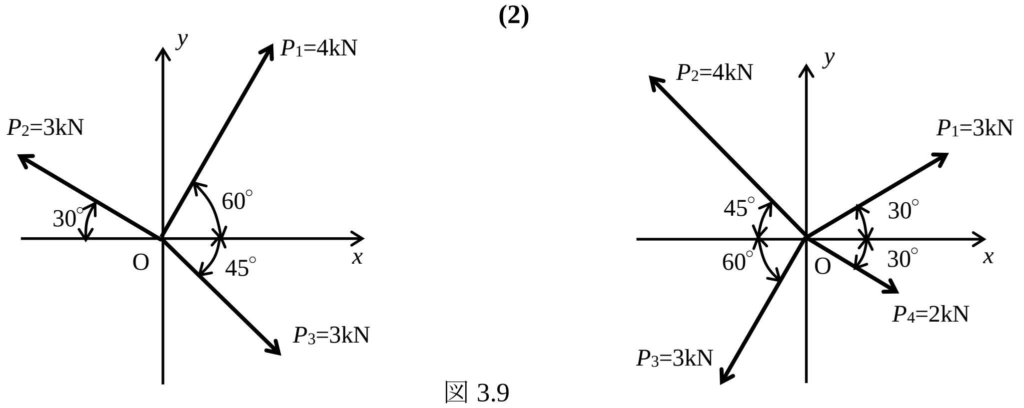


図 3.9

3.2.3　1 点に作用しない力の合成

1 点に交わらない多くの力や平行な力の合成は次のように行う．

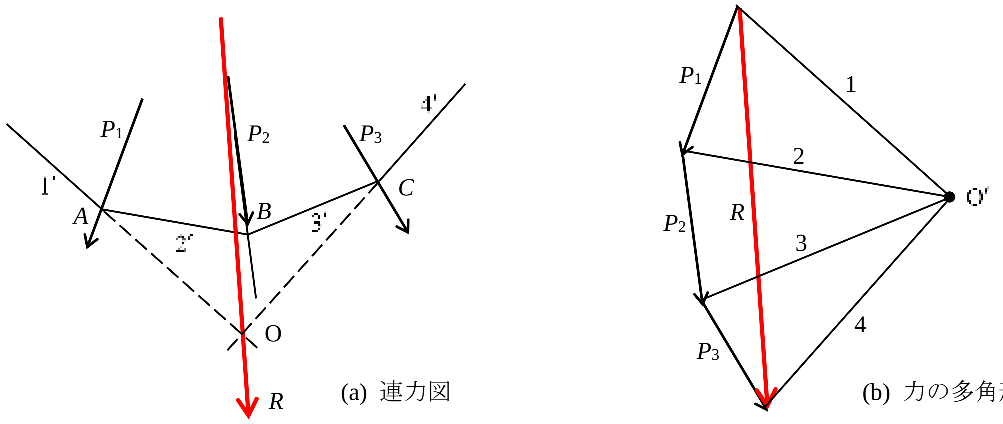
1)　力の多角形を描き，合力を求める．

2)　力の多角形の任意の位置に O′ 点を取り，この点 O′ と各力の始点，終点を結び，これを線 1，2，3，4 とする．

3)　図 b の線 1 に並行に図 a で線1′ を引き，力 P_1 との交点を A とする．点 A を通り線 2 と平行な線 2′ II を引き，力 P_2 との交点を B とする．以下同様に線3′，4′ を引き C を定める．

4)　線1′ と線 4′ との交点を O とすると，この O 点を合力 R が通る．

5)　点 O を通り，図(b)の R に平行で同じ大きさと方向の力を描けば，これが求める合力である．



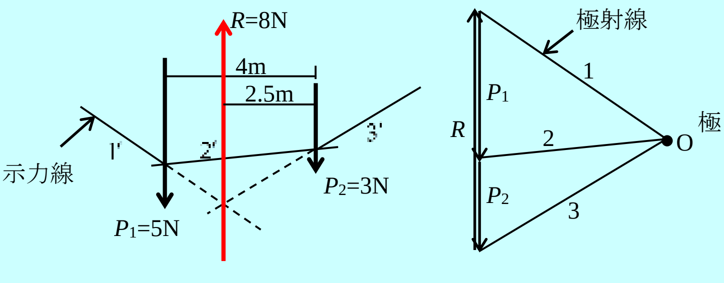
(a) 連力図　(b) 力の多角形

図 3.10

ここで，折れ線1′, 2′, 3′, 4′ を**連力図**といい，図 b の O′ を**極**という．

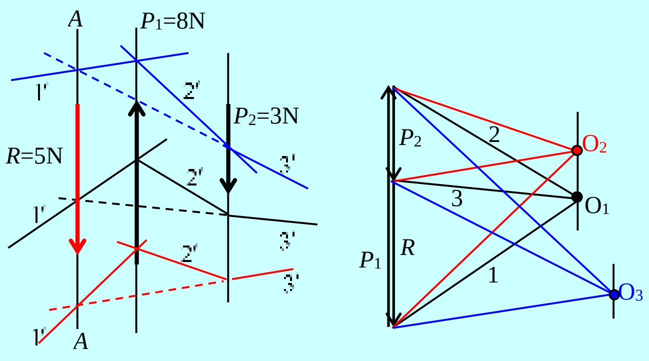
ちょっと休憩[４－１](連力図と力の多角形の関

(1)　P_1，P_2 と釣合う力 R を求める．



(a) 連力図　(b) 力の多角形

(2)　P_1，P_2 と釣合う力 R を求める（逆に R と P_2 の合力が P_1 になるとすれば，上の問題になる）．



(a) 連力図　(b) 力の多角形

極はどこにとってもよい（結果は同じ）．
力の作用線は *AA* 線上に交わる．
多角形の起点と極を結ぶものから始めて番号を付ける（極射線の順番を迷わないように注意）．

［**問題 3.3**］次の平行な力の合力の大きさと方向および位置を連力図を用いて求めよ.

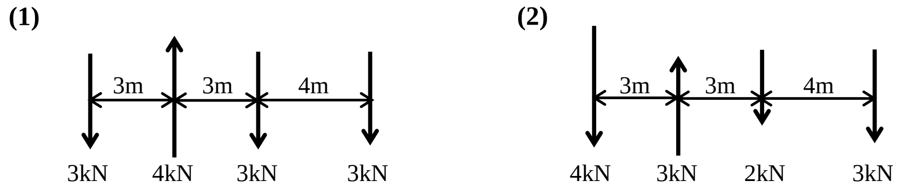


図 3.11

3.3　力の分解

3.3.1　1 つの力を定められた 2 方向に分解

(a)　図式解法

図 4.9 に示す力 P を，x，y 軸上に分解するには，平行四辺形の方法によって，合成の場合の反対を行えばよい.

すなわち，P の先端より y 軸に平行線を引いて B 点を求め OB（P_1）を引き，さらに x 軸に平行線を引き C 点を求め OC（P_2）を求めればよい.

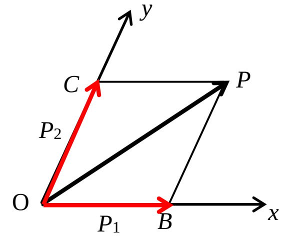


図 3.12

(b)　計算による方法

力 P を s，t 方向に分解する．$P\sin\alpha = P_2\sin\theta$ より

$$P_2 = \frac{P\sin\alpha}{\sin\theta} \tag{3.7}$$

$$P_1 = P\cos\alpha - P_2\cos\theta \tag{3.8}$$

分解された力を**分力**という.

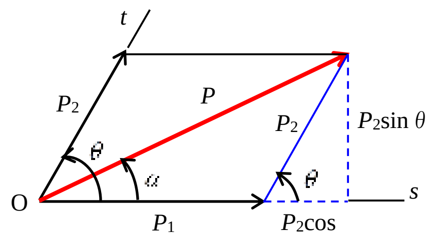


図 3.13

［**問題 3.4**］次の各図の力を x，y の方向に分解せよ.

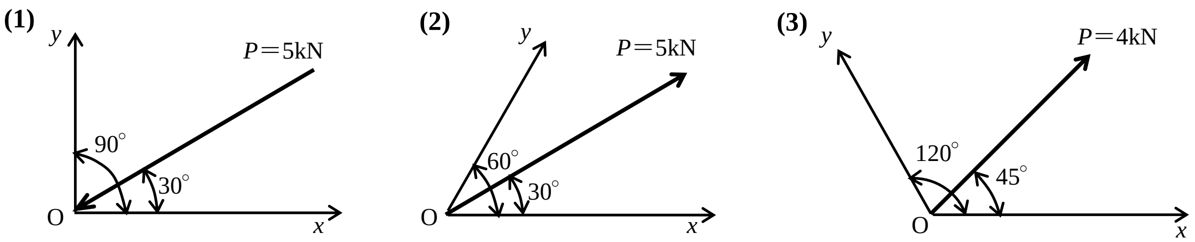


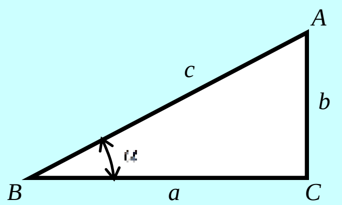
図 3.14

ちょっと休憩[3－2](三角関数)

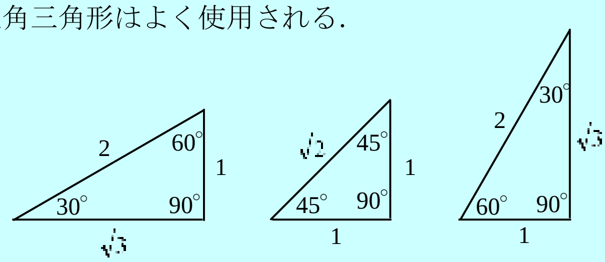
図(a)に示す直角三角形 ABC においてその 3 辺を a,b,c，∠ABC を α とすると，次の関係がある.

$$\sin\alpha = \frac{b}{c},\quad \cos\alpha = \frac{a}{c},\quad \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

また，図(b)のような特定の角度をもつ直角三角形はよく使用される.



図(a)



図(b)

3.3.2　多くの力を 2 方向に分解

多くの力を 2 方向に分解するには，まず，連力図を使ってそれらの合力を求め，この合力を 2 方向に分解する．

(1)　多くの力を任意の x，y 方向に分解

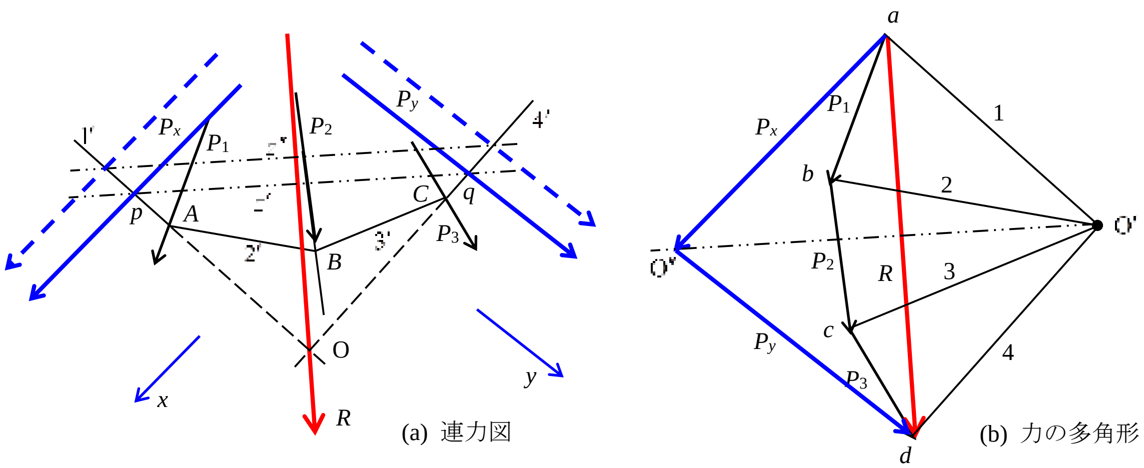


図 3.15

1)　力の多角形と連力図によって合力 R を求める．
2)　図(b)において，力の多角形の始点，終点から，x，y に平行に線を引き，その交点 O″ を求める．このとき， aO″，dO″ が x，y 方向の分力 P_x，P_y になり，方向は矢印の方向となる．
3)　図(b)において， O″ と O′ を結び，その線を z とする．
4)　図(b)の z に平衡に，図(a)に z' を引き，線 I と線Ⅳとの交点を p，q とすると，分力 P_x，P_y は，点 p，q を通る．
5)　分力 P_x，P_y を点 p，q に移す（このとき，z に平行な z' はどこに引いても，分力 P_x，P_y の交点は合力 R の作用線上にある）．

(2)　多くの力を，与えられた 2 点を通り，合力に平行な力に分解

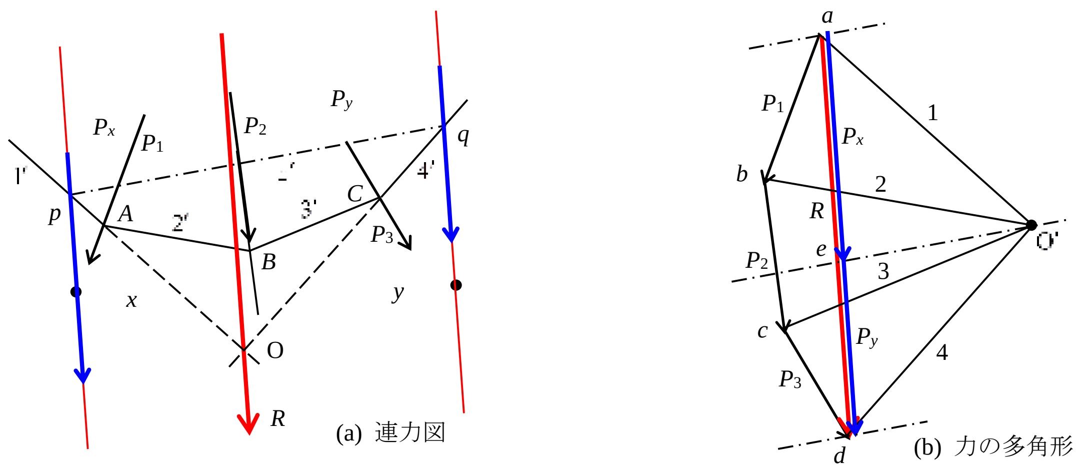


図 3.16

1)　力の多角形と連力図によって合力 R を求める．
2)　与えられた点 x，y から，合力 R に平行線を描き，連力図の線 I と線Ⅳとの交点を p，q とする．
3)　図(b)において O′ を通り，図(a)の pq に平行な線を引くと，ae が P_x，ed が P_y となる．
4)　P_x，P_y を図(a)に移す．