19 トラスの図式解法

トラスの部材に作用する力を想定する場合，図で考えると分かりやすい．その場合，Bow の記号を用いると便利である．また，各節点の変位を図解法で求める．

19.1　トラスの部材力

19.1.1　外力の表示

図 19.1 のように，トラスの部材と，これに働く外力（反力を含む）で区切られるスペースに次のように記号を付ける．

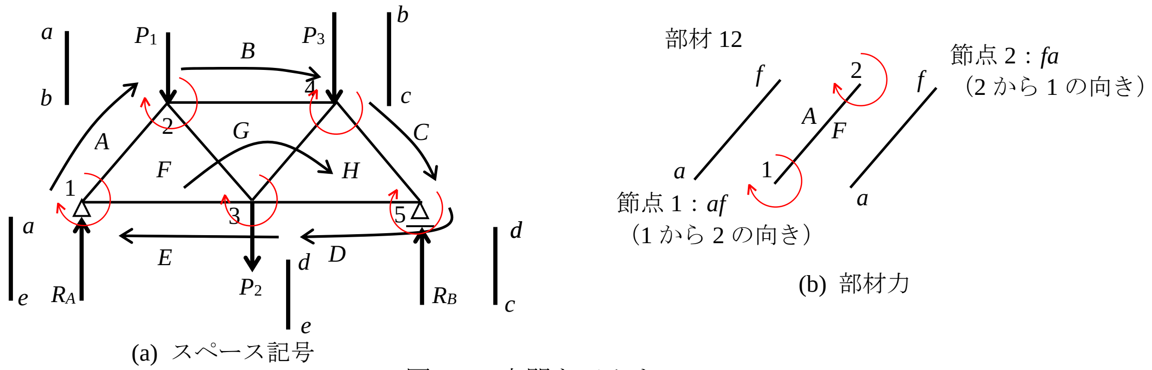


図 19.1 空間とベクトル

(1)　まず，反力 R_A と外力 P_1 と斜材で限られたスペースを A とする（出発点はどこを選んでもよい）．
(2)　次に，P_1 と P_3 と上弦材で囲まれたスペースを B とする．
(3)　以下，時計回りにトラスを 1 巡して，E まで記号をつける．
(4)　トラスにかかる荷重 P_1 は，スペース A からスペース B の境界にあると考えて，AB（あるいは BA）と考える．
(5)　同様に P_3 は BC，R_B は CD，P_2 は DE，R_A は EA と考える．
(6)　力（大きさ）で表すときは，記号 AB は力の起点を a，終点を b とし，ベクトル ab で表す（図に示す）．これにより，矢印は不要となる（ab の向き，cd の向きなど）．
このような記号法を **Bow の記号法**という．

注) 簡単にまとめると次のようである．
1. 部材と外力に区切られたスペースに右回りに記号をつける（英大文字を使用）．
2. 節点においてスペースを右回りに 1 回りして力の多角形を作る.このとき,スペースの記号 A,B,･･･に対応させて a,b,･･･とする．
注) ベクトル：大きさと方向を持つ量

19.1.2　部材力の表示

(1)　トラスの部材で区切られた区間を，続いて記号を付ける．
(2)　各部材力は，その部材端の節点で右回りに 1 巡するものとして表す．たとえば部材 12 は，節点 1 では A から F へ横切るため af, 節点 2 では fa となる. 部材 35 は節点 3 では hd 節点 5 では dh である.

19.1.3　節点法（Cremona 法）

節点法は，1 点に集まる力の釣り合いから，その中の未知の 2 力を求めること（すなわち，一つの節点に集まる外力と部材力の釣合いをとる方法）である．したがって，未知 2 部材の交点から出発して，順次隣の節点に移り，閉じた力の多角形を作図することによって二つずつの部材力を求めていく．未知

の 2 部材の交点は通常支点等がこれにあたる．

(1)　力の多角形

1. 節点の周囲を時計回りに 1 周するときに，横切る順序で力のベクトルを取り，多角形を描く．
2. このとき，未知の部材力が二つ，最後に残るように出発点となるスペースを決める．

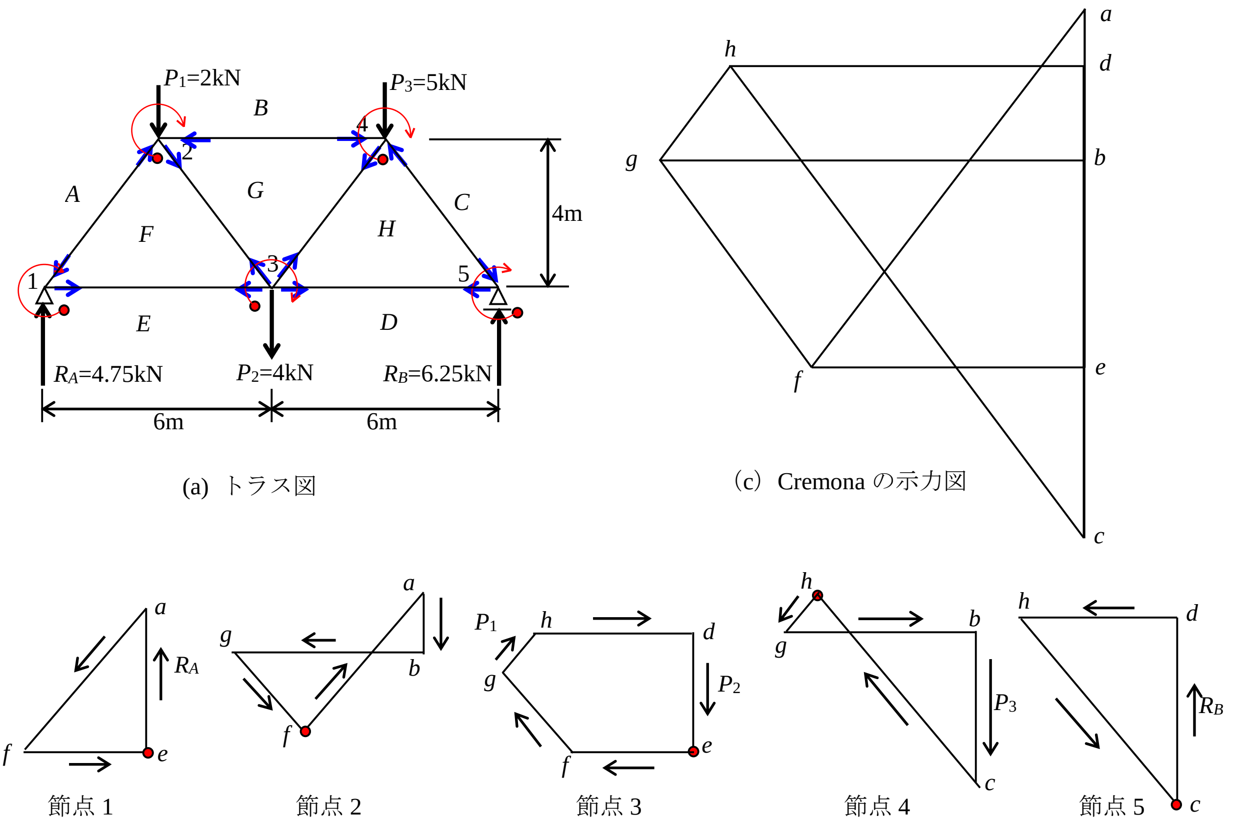
(2)　部材力

1. 1 節点で力の多角形を描くとき，最後に未知の部材力が二つ続くから，それによって多角形を閉じさせることができる．
2. 力の多角形を 1 周するようにスペース記号をつける．これによって未知力の大きさ，向きが求まる．矢印はつけなくてもスペース記号によって判断することができる．
3. これらの図は，続けてすべての節点についてまとめて描いていく．これを **Maxwell の図**あるいは **Cremona の示力図**と言う．

(3) 部材力の正負

求めた部材力の方向を，与えられたトラス図の扱っている部材の節点の近くに描き入れる．このとき，矢が節点から出る方向につけば引張材であり，入る方向につけば圧縮材である．

［**例題 19.1**］トラスに図のような荷重が作用したときの，部材力を図解法で求める．
［**解**］次のような順序で図解する．
(1) 反力は R_A=4.75kN，R_B=6.25kN となる．
(2) 荷重と部材で区切られたスペースを，右回りに A から記号をつける．
(3) 未知部材が 2 本の所，ここでは節点 1 から力の多角形を描く（図 b は説明のためで，通常不要）．出発するスペースに赤丸をつけてある．図 b には説明のため矢印をつけてある．
(4) 図 b は図 c のように一まとめにして描く（図 c）．この図をスケールで読み取る．
(5) 図 c から各部材力の方向を読みとって図示すると，図 a の青色矢印のようになる（部材 12 は節点に入るように働くので圧縮部材，部材 13 は節点より出る方向に働くので引張部材と考える）．



(a) トラス図

(c) Cremona の示力図

(b) 各節点での釣合い（力の多角形）

図 19.2　Cremona の図解法

(6) 図 c（Word で描いた図）からは読み取るのが難しいので，別に方眼紙に手書きして，その大きさを読み取ると次のような結果（2 行目）が得られる．

部　材	12	13	23	24	34	35	45	
部材力（図から）	-5.9	3.6	3.4	-5.6	1.6	4.7	-7.8	kN
部材力（計算）	-5.94	3.56	3.44	-5.63	1.56	4.69	-7.81	kN

注) 図を注意深く描き，読み取ることによってある程度の値を得ることができ，実際問題としてこれで十分である．この解は小学 5,6 年生 16 人，中学生 2 人計 18 人中の一人の解である．小学生でも理科の物理の問題として，このような問題を解くことができるのは面白い．

19.2　トラスの変形

19.2.1 部材の伸び

発生する部材力によって，部材は伸びる（あるいは縮む）が，その量は Hooke の法則より

$$\Delta l_N = \varepsilon l = \frac{\sigma}{E} l = \frac{Nl}{EA}$$

また，温度の変化による伸縮は，材料の線膨張係数を α，温度の変化を $\pm t$°C とすると

$$\Delta l_t = \pm \alpha t l$$

したがって，部材の全伸びは

$$\Delta l = \Delta l_N + \Delta l_t = \frac{Nl}{EA} \pm \alpha t l$$

19.2.2　図解法

トラス部材 AC，BC を考え，それぞれの伸びを Δl_1，Δl_2（既知）とする．

(1)　*A*，*B* が共に不動の場合，節点 *C* の変位を求める．

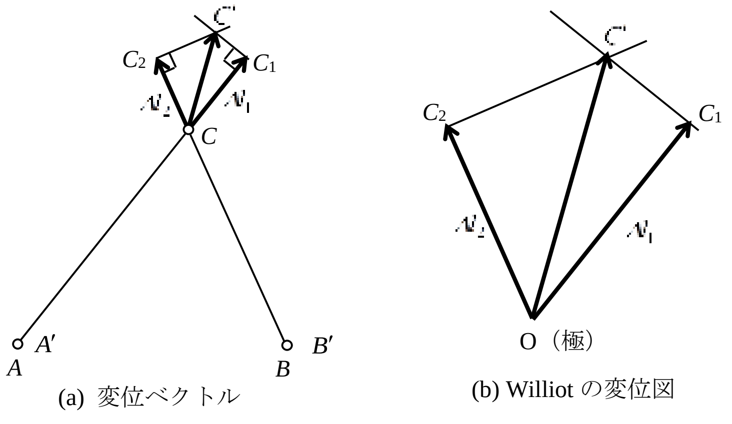


図 19.3　A，B が不動の場合の C 点の変位

1.　A，B を中心として，半径 $\overline{AC} + \Delta l_1, \overline{BC} + \Delta l_2$ の円弧を描き，交点 C' を求める．

注) この場合，伸び Δl は部材長に比べて非常に小さいため，C_1，C_2 において AC_1，BC_2 に立てた垂線の交点を C' として差し支えない．

2.　交点 C' が変位点となる（$\overline{CC'}$ は節点 C の変位ベクトル）．

3.　この場合，節点とは無関係に変位のみを抽出して，拡大スケールで作図を行うことができる．これを **Williot の変位図（Williot 図）** という．符号に注意．

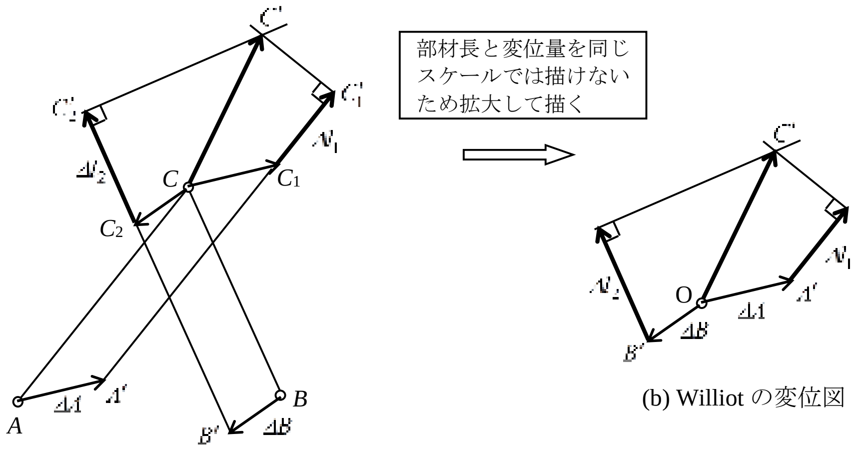
(2)　*A*，*B* が共に変位する場合，節点 *C* の変位を求める．

1.　*A*，*B* の変位 Δ_A, Δ_B は既知として，それぞれの新しい位置を A', B' とする．

2.　部材 *AC* が *BC* とは無関係に，それ自身に平行移動して $A'C_1$ の位置から Δl_1 だけ伸びたとすれば，節点 C_1 は C_1' へ移る．

3.　部材 *BC* についても同様に考えれば，*C* は C_2 から C_2' へ移る．実際には，C_1', C_2' は一致していなければならないので，A', B' を中心とする円弧の交点 C' を求めれば，*C* の変位 CC' が決まる．

4.　円弧の代わりに垂線を用いて，変位を抽出して Williot 図を描けば図 b のようになる．Δl を図りだす方向に注意すること．



(a) 変位ベクトル　　(b) Williot の変位図

図 19.4　*A*，*B* が共に移動する場合の *C* 点の変位

Williot 図についてまとめると次ようになる．

1.　Williot 図の極は，与えられたトラスのすべての節点を代表する．

2.　節点の変位は, 極と変形トラスの節点（ダッシュをつけて表示）を結ぶベクトルとして与えられ, それは極から出る方向に向く．

3.　変形トラスの節点のうちで極に重なるものは，与えられたトラスの不動節点である．

注)

・図 19.3，19.4 において，A', B', C' は変形したトラスの節点を表す．

・Williot 図はトラス図の中から変位のみを抜き出して，拡大したスケールで示したものである．

・極 O はトラス図の節点 *C* に重ねて考える．

・図 19.4(a)において，節点 *A*，*B* に変位（Δ）があると，Δ は平行移動によって *C* へ移され，*A*，*B* を *C* に重ねたことと同じになる．そしてこの Δ は Williot 図では O から出る方向に示される（b 図）．

・すなわち，極はもとのトラスの 3 節点 *A*，*B*，*C* を代表していることになる．

・もし，Δ がなければ，極は A', B' をも代表することになる（図 8.3(b)）．

19.2.3　相対変位図

1 つの節点を不動とし，そこより出る 1 つの部材の伸びの方向は，部材の方向であると仮定する（図 19.5 では，*a* 点が不動，部材 *ac* の方向を不動とする）

(1)　各部材の伸び量 Δl をすべて求める

(2)　極 O を選ぶ．これは始点 *a* を代表する．部材 *ac* の伸び Δl_2 は引張りで，*c* は *a* から右に進むから，その方向に Oc' をとる．

(3)　節点 *b* の変位を定めるため，*bc* の伸び Δl_3 に等しく c' 点から $c'b_1$ をとり，Δl_2 が縮みであることに注意して，O から Δl_1 に等しく Ob_2 をとる．b' は b_1 と b_2 を通り $\Delta l_2, \Delta l_3$ に

部材	N(kN)	l(m)	$\Delta l = Nl$ $(\times 1/EA)$
ab	-5.9	5	-29.5
ac	3.6	6	21.6
bc	3.4	5	17.0
bd	-5.6	6	-33.6
cd	1.6	5	8.0
ce	4.7	6	28.2
de	-7.8	5	-39.0

立てた垂線の交点である．

(4)　同様にして d' , e' を求める．

(5)　各節点の変位量は極 O と b' , c' , d' , e' を結ぶベクトルで与えられる．これをトラス図の各節点に移して破線で結べば，トラス全体の相対変位が求められる．これを **Williot の相対変位図**という．

(6)　求まった変位ベクトルをとトラス図に転写する（赤線）．

ここでは説明の便利のため節点記号を数字から英小文字に変える．

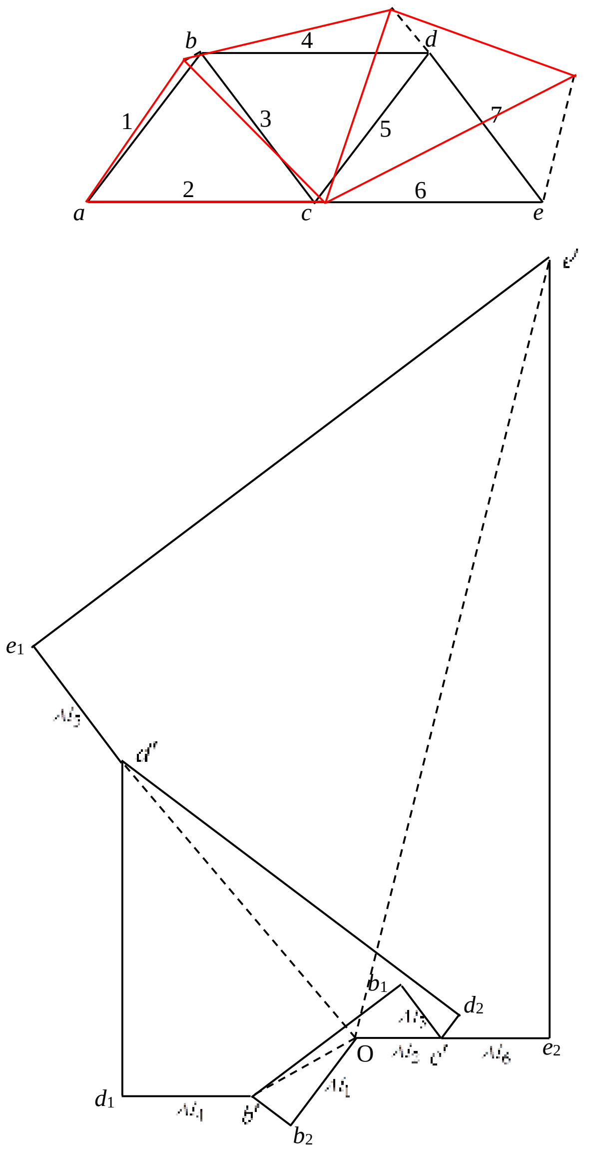


図 19.5　Williot の相対変位図

19.2.4　回転変位図

前項で求めた相対変位図では，実際には水平移動だけしかできない支点 e が浮き上がって，条件が満足されない．そこで，トラス全体を回転し，それに伴って生ずる各節点の変位を求めて調整を行い，真変位を求める操作が必要となる．

図 15.6 はトラスを a のまわりに反時計回りに微小回転させたとき，各節点が起こす変位の状況を示す．この場合，節点の変位は a と各節点を結ぶ線分長と回転角を乗じた大きさで，方向は線分方向と直

角の方向である．

極 O を選んで変位図を作ると図 19.6(b)のようになる．

1. 変位ベクトルは極から出て，その先端は与えられたトラスと相似なトラスの節点となっている．
2. この相似なトラスは, もとのトラスを与えられた回転方向に 90°だけ回転したものとなっている．

すなわち，Williot 図は，図 19.6(b)のようになり，e 点の回転変位 Oe'' を下弦とするトラスを描けば，その節点の位置が各節点の変位と一致する．これを **Mohr の回転変位図**という．

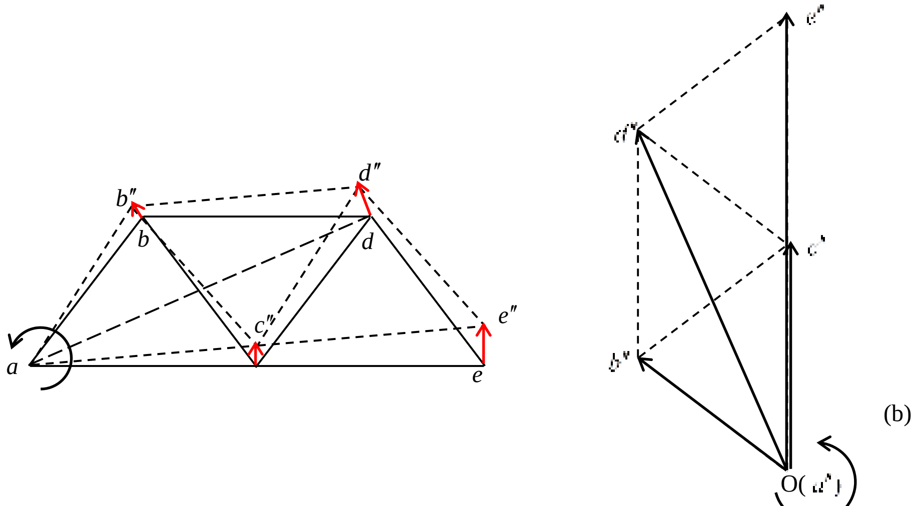


図 19.6　Mohr の回転変位図

19.2.5　真変位図

相対変位図で求めた節点変位には，回転変位が含まれているため，真変位を求めるにはこれを引き去らなければならない．

支点 e はローラー支点であるから，水平方向の変位しか許されない．

Williot 図が与えた変位は Oe' でその垂直成分 Oe'' は不動節点 a を中心とした節点 e の回転変位である．これを Oe' から差し引くと節点 e の水平変位 $e''e'$ が求まる．

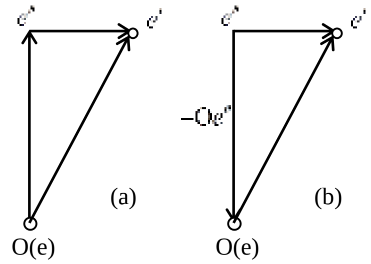


図 19.7

支点 e の回転変位 Oe'' に対応する各節点の変位は，Mohr 図を利用して作図できるから，Williot 図と Mohr 図を組み合わせて真変位図が求められる．

(1)　Williot 相対変位図の極 O を Mohr 図の極に重ねる．

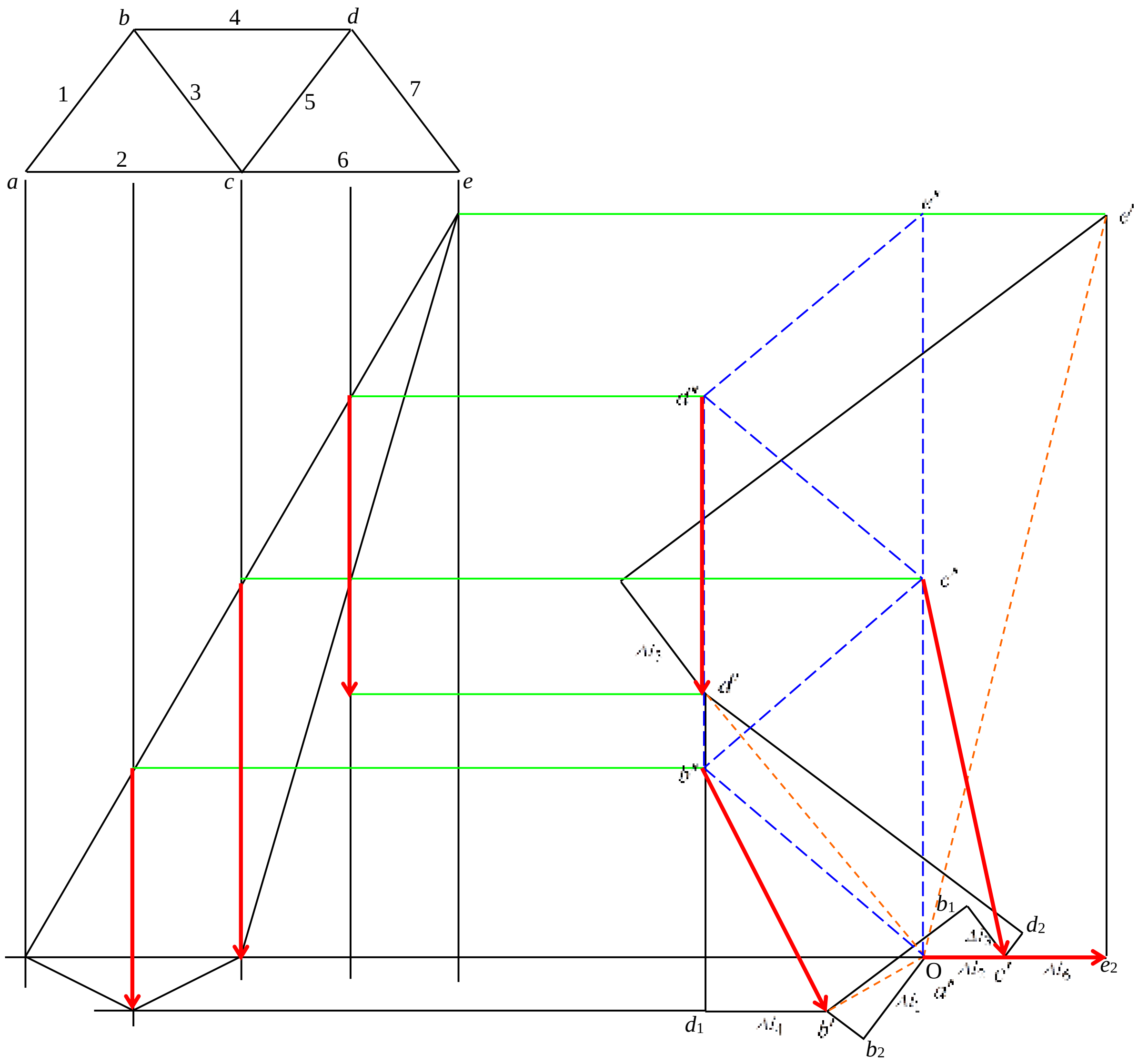
(2)　e' より水平線を出し，O に立てた垂直線との交点を e'' とする．

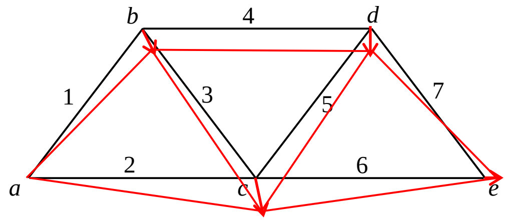
(3)　$a''e''$ を下弦として，相似トラスを垂直に点線のように作図し，各節点を $b'', c'', \cdots$ のようにとる．

(4)　各節点の真変位は相似トラスの節点と，これに対応する Williot 図の節点を結ぶベクトルで与えられ，ベクトルの向きは Williot 図の節点の方向に向く．

以上の方法でトラスの変形を作図することができるが，ここに書かれた図を **Williot・Mohr の変位図**という．

注) 本例のように作図を支点から始めると，極から離れるにつれて図が拡大し，精度も低下するため，不動の節点と部材をトラスの中央付近から始めるとよい．



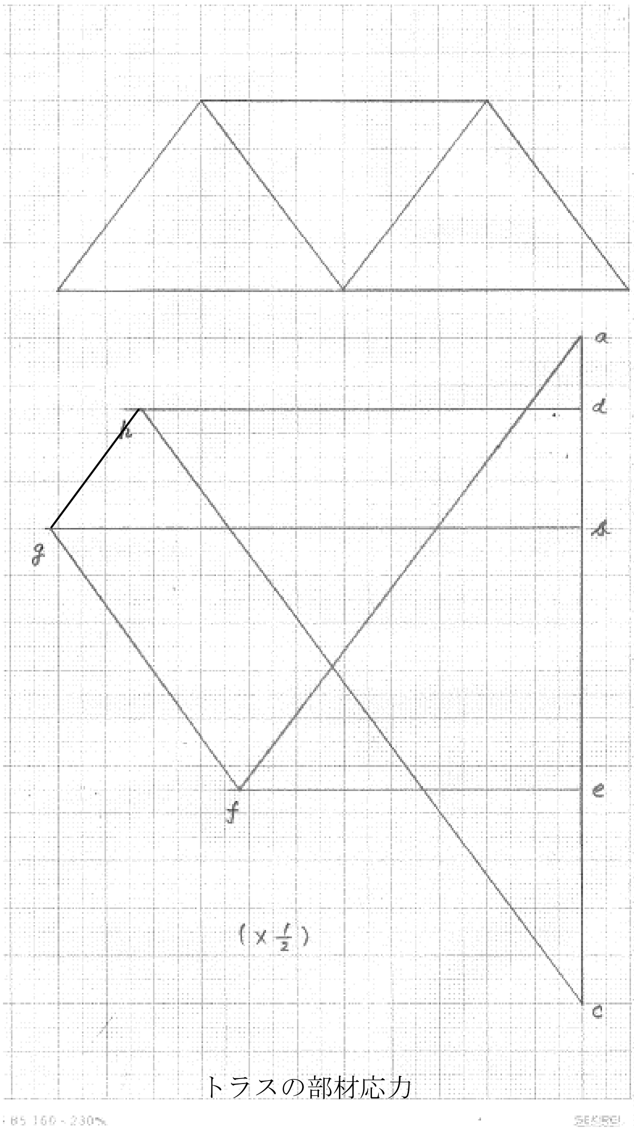


真変位図
1. O（a''）から垂直に出して e'' を求める.
2. この $a''e''$ をベースにトラスを描く.
　（各節点→ b'', c'', d''）
3. これから真変位量 $b''b', c''c', d''d', e''e'$ を縮尺によって求める.
4. もとのトラス上に上で求めた $b''b', c''c', \cdots$ に平行に真変位図を描く
5. $b''b', c''c', \cdots$ を垂直に直したものがたわみとなる.

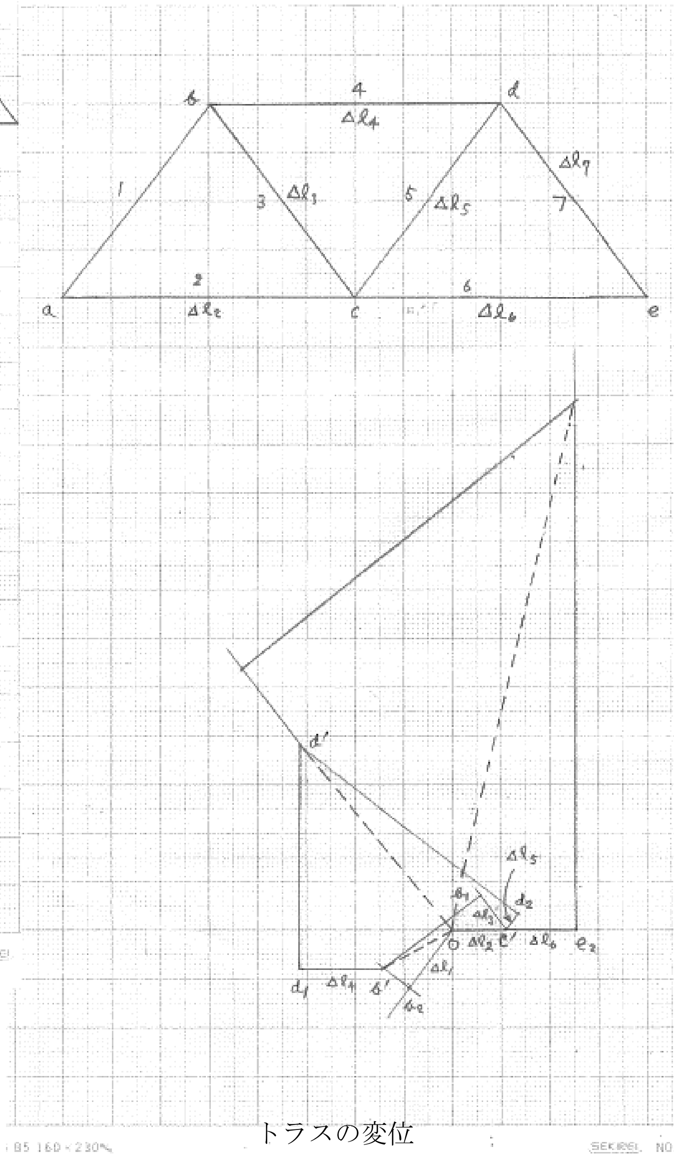
図 19.8　真変位図

ちょっと休憩[19－1](トラスの図解法)

方眼紙で求めた部材力と変位（B5,1mm 方眼紙）



トラスの部材応力



トラスの変位

注）このように丁寧に図を書いて，いろいろ検討してみることは，自分の勉強の成果を試してみることであり，大変楽しい．このような検討を，苦痛とみるか，楽しみであるとみるかは，その人の余裕によるのではないでしょうか！