18 静定トラス

トラスは，図 18.1 のように，細長いまっすぐな部材を三角形状に組み合わせ，この基本形をいくつも連結して荷重に抵抗するように作られた構造物である．大きな川にはりを渡そうとすると，長く，太くなって重たくなる．このような場合，中をくりぬいて図 18.1 のようにすると軽くなり，扱いやすい．

18.1 トラス構造物

トラスが使用される理由としては次のようなことが考えられる．

はりは，荷重が作用するとせん断力と曲げモーメントが生じる．はりの支間が長くなると，曲げモーメントの影響は大きくなるが，せん断力の影響はあまりない．

曲げ応力度は，はりの上下縁で最大となり中立軸上では 0 となる．また，せん断応力度は中立軸上で最大となる．

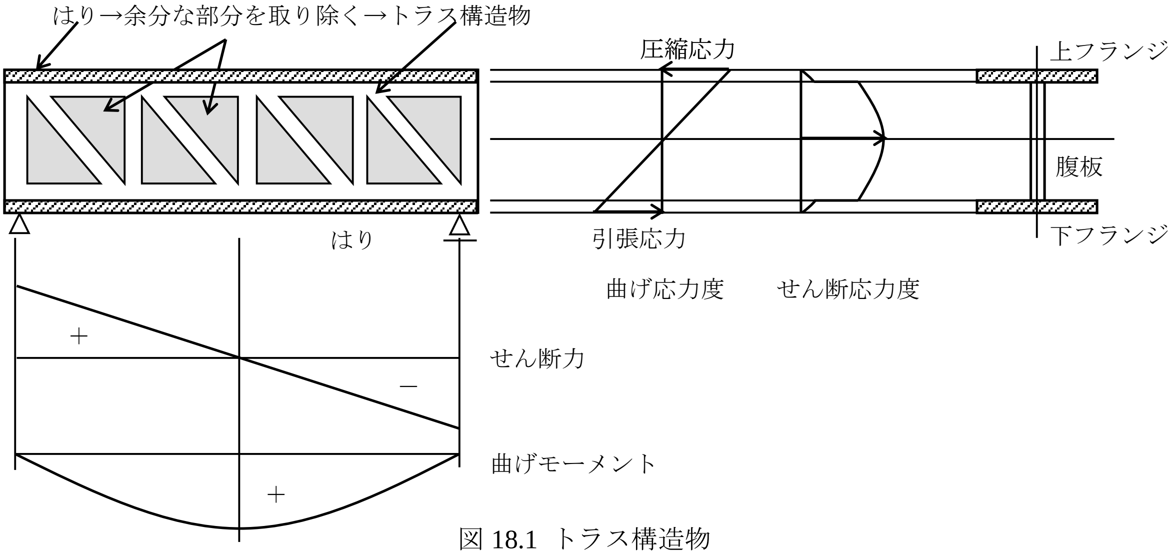


図 18.1　トラス構造物

以上の理由により，はりが長くなると，自重，荷重に耐えるために高さも高くなり重くなる．そこで，中央部の腹板はせん断応力度に抵抗するようにして，不要な部分を取り除いた方（トラス構造にした方）が，材料の節約になり，自重も軽減され，合理的，経済的な構造物になる．

トラス構造の三角形組みは，最も簡単で安定した構造物である．これらの部材に生じる応力も，引張りと圧縮のみが生じる（軸方向力のみ）と考えて簡単に計算できる．

これらが，トラスを利用する理由である．

注) 自転車（2 輪車）は動いていなければひっくり返る．2 輪車が動いていれば倒れないということを発見した人はすばらしい．自動車（4 輪）は安定しているが車が 4 個必要．3 輪者は車が 3 個で安定しており，自動車より簡単である．

18.2　トラス各部の名称

トラスは通常，次図のような部材によって構成されている．

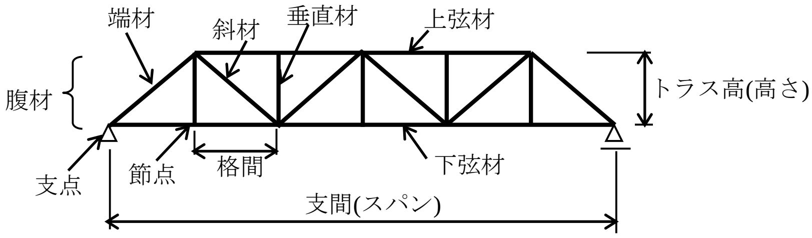


図 18.2

18.3　トラスの静定と安定

トラスが「安定である」ということは次の 2 点で表される．

1. トラス全体が静止していること
   これは，支点に関係し，トラス全体が移動しなければ**外部安定**であるという．
2. 内的に大きく変形しないこと
   これは，各部材の連結方法に関係し，大きく変形しなければ**内部安定**という．

注) 構造物が安定であるということは，構造物が外力を受けてもつねに静止している状態にあることである．

(1)　安定と不安定

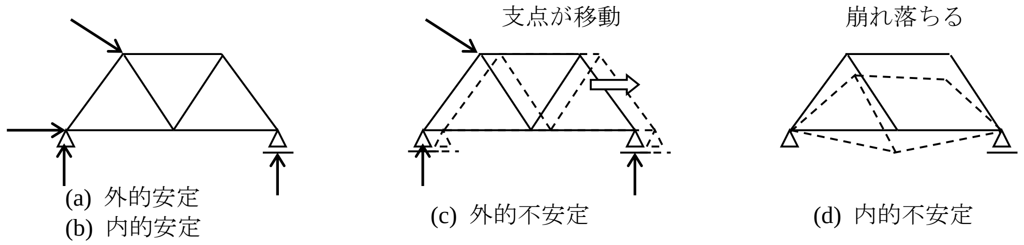


図 18.3 トラスの安定と不安

(2)　静定と不静定

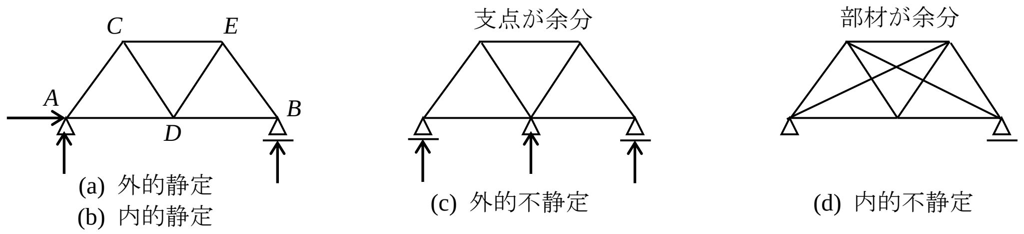


図 18.4 トラスの静定と不静

釣合いの 3 条件式で，すべての反力，部材力が求まるものを**静定構造物**という．

- 構造物
  - 安定構造物
    - 静定構造物（釣合いの 3 条件式で反力が求まるもの）
    - 不静定構造物
      - 外的不静定構造物（反力が余分）
      - 内的不静定構造物（部材が余分）
      - 外的内的不静定構造物
  - 不安定構造物（構造物として成り立たないもの）

(3)　不静定次数の数え方

図 14.4(a)において，基本 3 角形 ACD に一つの三角形 CDE が加わると，部材は 2 本，ヒンジは 1 個増加するのを見る．トラスの総部材数を m，総ヒンジ数を j とすると，三角形が一つ増加するごとに，部材は 2 本，ヒンジは 1 個増加するから，次の関係が成り立つ．

$(m-3) : (j-3) = 2 : 1$　（左辺は基本三角形の部材・ヒンジ数を引く）

ゆえに

$$m=2j-3 \tag{18.1}$$

ここに

$m=2j-3$ のとき　内部的静定（内的静定条件は $m-2j+3=0$）
$m>2j-3$ のとき　内的不静定（$m-2j+3$ の値を内的不静定次数という）
$m<2j-3$ のとき　内的不安定

トラスが外的静定であるためには，反力数が 3 個でなければならないから，反力数を r とすると

$$r-3=0 \quad \text{（外的静定条件）} \tag{18.2}$$

トラスが不静定次数は

$$N=(m-2j+3)+(r-3) \tag{18.3}$$

で計算する．ここに

$N<0$：不安定，　$N=0$：安定・静定，　$N>0$：安定・不静定

18.4　部材応力の計算法

トラスにおいては次の仮定を設ける．

1. **部材は摩擦のないピンで結合される → 部材は節点で自由に回転する**
2. **荷重はすべて節点に作用するものとする**
   → 節点間に作用する荷重は間接荷重として節点に作用させる
   → トラスの部材には**軸方向力のみ**が生じる（曲げモーメントやせん断力は生じない）
3. 各部材は直線材であり，節点の中心を結ぶ直線は部材の軸と一致する
4. すべての外力の作用線は，一平面内にあるものとする

トラスの部材応力の計算方法は，次の方法がある．

解析法

(1) 節点法　　節点の近傍で部材を切断し，その切断面から出る方向に部材力を作用させ，釣合い条件式 $\sum H=0,\ \sum V=0$ を用いて解く．

(2) 断面法

任意の位置で断面を切断し，その左側の自由物体の鉛直およびモーメントの釣合いをとる．

1. **せん断力法（クルマン法）**（主に腹材の計算に使用する）
   任意の位置で断面を切断し，その左側の物体のせん断力釣合いをとる．
2. **モーメント法（リッター法）**（主に弦材の計算に使用する）
   任意の位置で 3 部材を含むように断面を切断し，求めようとする部材以外の 2 本の部材の交点でモーメントをとる．

図解法　クレモナ法，クルマン法，リッター法等（後述）

反力の計算は，トラスを 1 本のはりと見なして，荷重を作用させて求める．

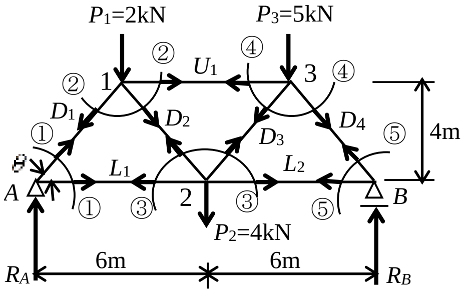
18.4.1　節点法

節点において，釣合いの 3 条件式 $\Sigma V=0,\ \Sigma H=0,\ \Sigma M=0$ を用いて未知部材応力を求める方法を**節点法**という．

部材力の計算は

未知数（部材数）が 2 個の節点から出発する．
部材を節点の近傍で切断し，その切断面から出る方向に部材力を作用させる．
釣合い式 $\Sigma V=0,\ \Sigma H=0$ を適用して計算する．

［**例題 18.1**］次のトラスの部材力を節点法で求めよ．



$\sin\theta = \frac{4}{5} = 0.8,\ \cos\theta = \frac{3}{5} = 0.6$

図 18.5　節点法による解法

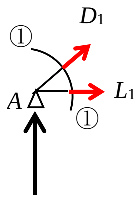


図 18.6 自由構面

［**解**］反力：トラスを 1 本のはりとみなし，荷重を所定の位置に作用させて求める．

$$R_A \cdot 12 - 2\cdot 9 - 4\cdot 6 - 5\cdot 3 = 0 \quad \therefore\ R_A = 4.75\text{kN}$$

$$R_B = 2+4+5-R_A = 6.25\text{kN}$$

部材力の計算は未知数が 2 個の節点から出発することを原則とするため，道部材が 2 本である節点 A から出発する．節点 A において，部材を節点の近傍で切断し，その切断面から出る方向に部材力を作用させる．この節点の部分だけを切りだした図 14.6 を自由構面という．

この自由構面において釣合い式$\sum H = 0, \sum V = 0$を次のように適用する．

節点 A（断面①-①）：

$$\sum V\uparrow = R_A + D_1 \sin\theta = 0, \quad \therefore\ D_1 = -\frac{R_A}{\sin\theta} = -5.94\text{kN}$$

$$\sum \overrightarrow{H} = D_1\cos\theta + L_1 = 0, \quad \therefore\ L_1 = -D_1\cos\theta = 3.56\text{kN}$$

同様に未知数が 2 部材の節点を探して，残りの節点 1,2,3 について計算していく．

節点 1（断面②-②）：

$$\sum V\uparrow = -D_1\sin\theta - D_2\sin\theta - P_1 = 0, \quad \therefore\ D_2 = 3.44\text{kN}$$

$$\sum \overrightarrow{H} = -D_1\cos\theta + D_2\cos\theta + U_1 = 0, \quad \therefore\ U_1 = -5.63\text{kN}$$

節点 2（断面③-③）：

$$\sum V\uparrow = D_2\sin\theta + D_3\sin\theta - P_2 = 0, \quad \therefore\ D_3 = 1.56\text{kN}$$

$$\sum \overrightarrow{H} = -L_1 - D_2\cos\theta + D_3\cos\theta + L_2 = 0, \quad \therefore\ L_2 = 4.69\text{kN}$$

節点 3（断面④-④）：

$$\sum V\uparrow = -D_3\sin\theta - D_4\sin\theta - P_3 = 0, \quad \therefore\ D_4 = -7.81\text{kN}$$

検算：節点 B（断面⑤-⑤）：

$$\sum V\uparrow = D_4\sin\theta + R_B = 0, \quad \therefore\ D_4 = -7.81\text{kN}$$

$$\sum \overrightarrow{H} = -L_2 - D_4\cos\theta = 0, \quad \therefore\ L_2 = 4.69\text{kN}$$

18.4.2　断面法

部材力の計算：

トラスを，求めようとする部材を含めて 3 本の部材を通るように切り，その左側の構面の釣り合いを考える．部材力は断面より出る方向に作用させる．

［**例題 18.2**］次のトラス部材力 U_1，D_2，L_1 を断面法で求めよ．

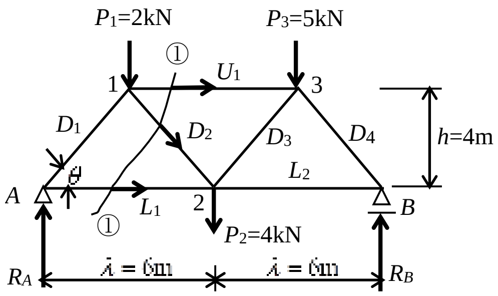


図 18.7　断面法による解析

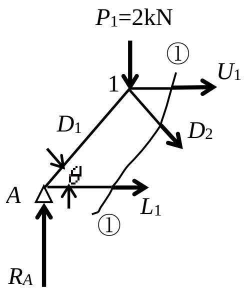


図 18.8 自由構面

［**解**］図 18.8 で釣合い式を考える．

1)　斜材：

図の鉛直方向の釣合い $\sum V = 0$ をとる（すなわち，せん断力の釣合いをとる）．

$$R_A - P_1 - D_2 \sin\theta = 0,$$

$$\therefore D_2 = \frac{R_A - P_1}{\sin\theta} = \frac{4.75 - 2}{0.8} = 3.44\text{kN}$$

上式第 2 項の分子（$R_A - P_1$）は節点 1-2 間のせん断力を表しており，次のように書き換えられる．

$$\therefore D_2 = \frac{R_A - P_1}{\sin\theta} = \frac{Q_{A-2}}{\sin\theta} \qquad (18.4)$$

この式は腹材を求める一般式を表しており，影響線を求めるのに使用する．

分子は下弦材 $A2$ のせん断力（間接荷重ばりに相当）を表しており，この方法を**せん断力法**という．

2)　弦材：

部材 L_1 を求めるために，L_1 以外の 2 本の部材 U_1, D_2 の交点 1 においてモーメントの釣合いをとる．

$$\sum M_1 = 0: \quad R_A \cdot \lambda / 2 - L_1 \cdot h = 0,$$

$$\therefore L_1 = \frac{R_A \cdot \lambda/2}{h} = \frac{M_1}{h} = \frac{4.75 \times 3}{4} = 3.56\text{kN}$$

部材 U_1 を求めるために，U_1 以外の 2 本の部材 L_1, D_2 の交点 2 においてモーメントの釣合いをとる．

$$\sum M_2 = 0: \quad R_A \cdot \lambda - P_1 \cdot \lambda / 2 + U_1 \cdot h = 0,$$

$$\therefore U_1 = -\frac{R_A \cdot \lambda - P_1 \cdot \lambda / 2}{h} = -\frac{M_2}{h} = -\frac{4.75 \times 6 - 2 \cdot 3}{4} = -5.63\text{kN}$$

部材 L_1，部材 U_1 の一般式は，それぞれ

$$L_1 = \frac{M_1}{h}, \qquad U_1 = -\frac{M_2}{h} \qquad (18.5)$$

であり，これらは，弦材を求める一般式を表しており，影響線を求めるのに使用する．分子にある数字はモーメントをとる節点を表しており，この方法を**モーメント法**という．

［**例題 18.3**］次の K トラスの指定された部材の一般式を求めよ．

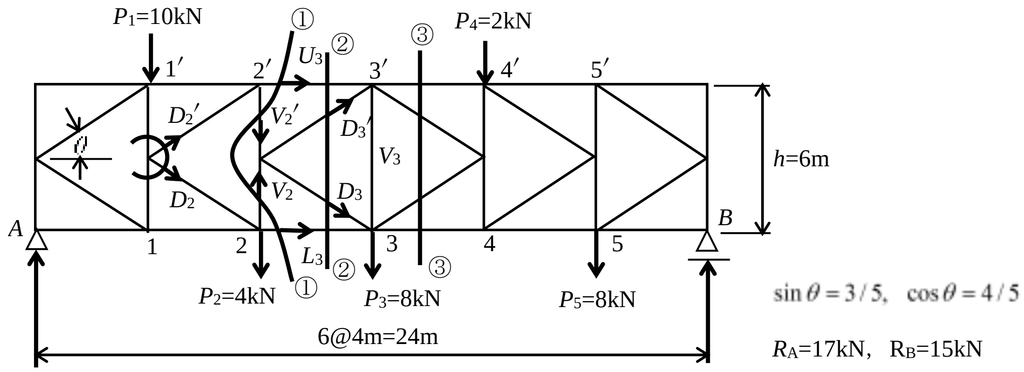


図 18.9

［解］

1)　断面①-①

$$\sum M_2 = 0: \quad U_3 \cdot h + M_2 = 0, \quad \therefore U_3 = -\frac{M_2}{h}$$

$$\sum M_{2'} = 0: \quad -L_3 \cdot h + M_{2'} = 0, \quad \therefore L_3 = \frac{M_{2'}}{h}$$

2)　断面②-②

$$\sum H = 0: \quad (D_3 + D_3')\cos\theta = 0, \therefore D_3 = -D_3'$$

$$\sum V = 0: \quad R_A - P_1' - P_2 + (D_3' - D_3)\sin\theta = 0, \quad \therefore D_3 = \frac{Q_{2-3}}{2\sin\theta}$$

これより　$D_2 = \dfrac{Q_{1-2}}{2\sin\theta} = -D_2'$　が求まる．

3)　V_2'：　節点 2′ において節点法で求める．一般に荷重 P_2' が作用しているとして

$$\sum V = 0: \quad D_2' \sin\theta + V_2' + P_2' = 0, \quad \therefore V_2' = -P_2' - D_2' \sin\theta = -P_2' + \frac{Q_{1-2}}{2}$$

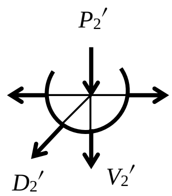


図 18.10

V_2：　節点 2 において節点法で求める．

$$\sum V = 0: \quad V_2 + D_2 \sin\theta - P_2 = 0, \quad \therefore V_2 = P_2 - D_2 \sin\theta = P_2 - \frac{Q_{1-2}}{2}$$

ここでの P_2, P_2' は単位移動荷重と考える．

4)　中央部材 V_3：断面②-②と断面③-③で切り取られる中央の部分の釣合いを考える．

$$\sum V \uparrow = 0:$$

$$(D_3 + D_4)\sin\theta - (D_3' + D_4')\sin\theta - P_3 - P_3' = 0$$

ここで　$D_3' = -D_3$，$D_4' = -D_4$ であるから

$$2(D_3 + D_4)\sin\theta - P_3 - P_3' = 0, \quad \therefore (D_3 + D_4)\sin\theta = \frac{P_3 + P_3'}{2}$$

次に，節点 3 で鉛直方向の釣合いをとると

$$\sum V = 0: \ (D_3 + D_4)\sin\theta + V_3 - P_3 = 0$$

この式に上の式を代入すると V_3 が求まる．

$$V_3 = \frac{1}{2}(P_3 - P_3')$$

［**問**］数値計算をせよ．

［答］$U_3 = -16\text{kN}$，$L_3 = 16\text{kN}$，$D_3 = 2.5\text{kN}$，$D_2 = 35/6 = 5.83\text{kN}$，$V_2' = 3.5\text{kN}$，$V_2 = 0.5\text{kN}$，$V_3 = 4\text{kN}$

［**例題 18.4**］次の曲弦トラスの指定された部材力を求めよ.

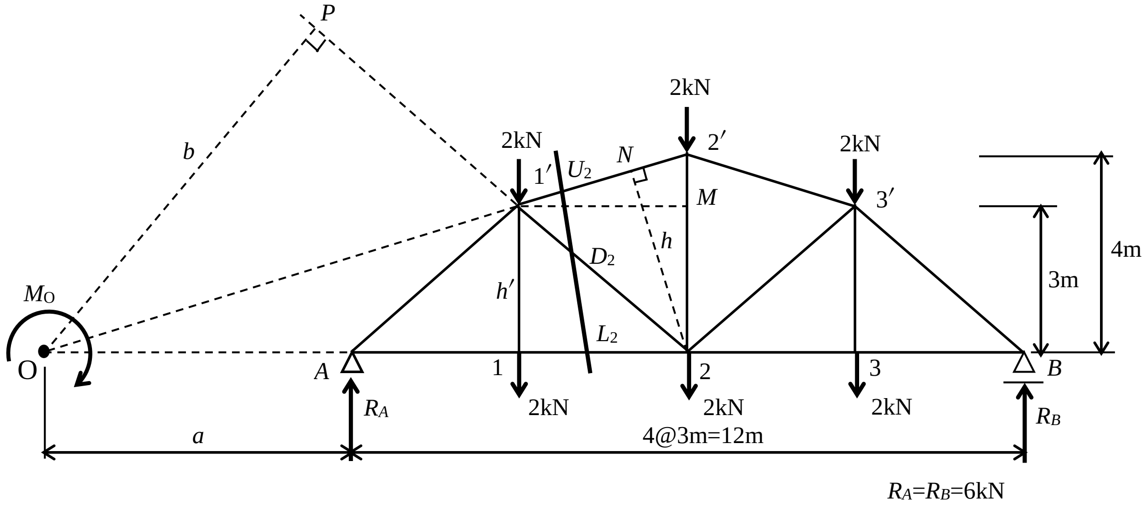


図 18.11

［解］

長さ a, b, h を求める.

$\triangle 1'2'M \backsim \triangle 22'N$　より　$1'2' : 1'M = 22' : 2N$

$$\therefore h = 2N = \frac{1'M \times 22'}{1'2'} = \frac{3 \times 4}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = 3.8\text{m}$$

$\triangle 1'\mathrm{O}1 \backsim \triangle 2'1'M$　より　$11' : \mathrm{O}1 = M2' : 1'M$,　　$\mathrm{O}A = a = 6\text{m}$

$\triangle 2P\mathrm{O} \backsim \triangle 211'$　より　$\mathrm{O}2 : \mathrm{O}P = 21' : 11'$

$$b = \mathrm{O}P = \frac{\mathrm{O}2 \times 11'}{21'} = \frac{12 \times 3}{\sqrt{3^2 + 3^2}} = 8.5\text{m}$$

部材力を求める.

$$\sum M_2 = 0 :\ R_A \cdot 2\lambda - (P_1 + P_1')\lambda + U_2 h = 0$$

$$U_2 = -\frac{R_A \cdot 2\lambda - (P_1 + P_1')\lambda}{h} = -\frac{M_2}{h} = -6.32\text{kN}$$

$$\sum M_{1'} = 0 :\ R_A \cdot \lambda - L_2 h' = 0$$

$$L_2 = \frac{R_A \cdot \lambda}{h'} = \frac{M_{1'}}{h'} = 6\text{kN}$$

$\sum M_\mathrm{O} = 0 :$　　外力による O 点のモーメントは右回りを正とすると

$$-R_A \cdot a + D_2 b + (P_1 + P_{1'})(a + \lambda) = 0$$

$$D_2 = -\frac{-R_A \cdot a + (P_1 + P_1')(a + \lambda)}{b} = -\frac{M_\mathrm{O}}{b} = 0$$

注）次のような 3 元 1 次連立方程式を解いてもよい.

$$\sum H = 0 \ :\ U_2 \cos\theta_1 + D_2 \cos\theta_2 + L_2 = 0$$

$$\sum M_{1'} = 0 :\ R_A \cdot 3 - L_2 \cdot 3 = 0$$

$$\sum V = 0 \ :\ R_A - 2 + U_2 \sin\theta_1 - D_2 \sin\theta_2 = 0$$

［**問題 18.1**］次のトラス構造物のすべての部材力を求めよ．

(1)

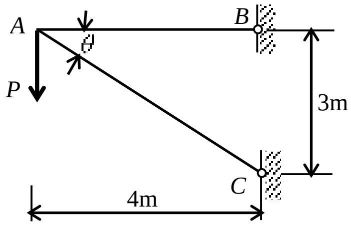


図 18.12

(2)

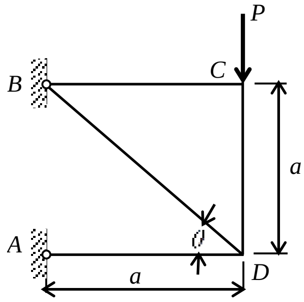


図 18.13

(3)

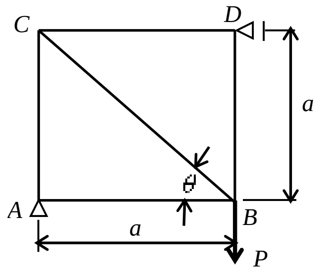


図 18.14

(4)

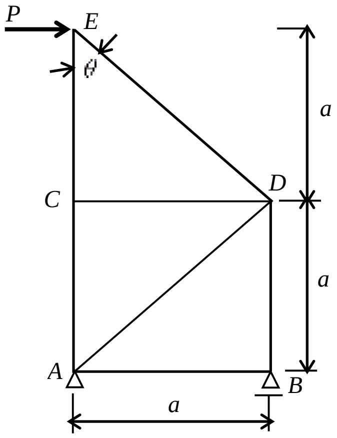


図 18.15

(5)

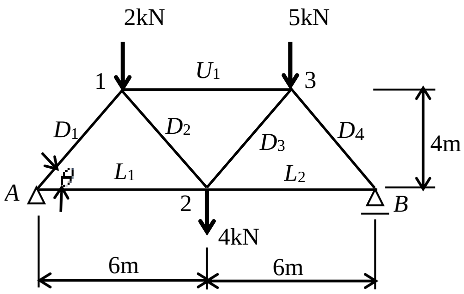


図 18.16

(6)

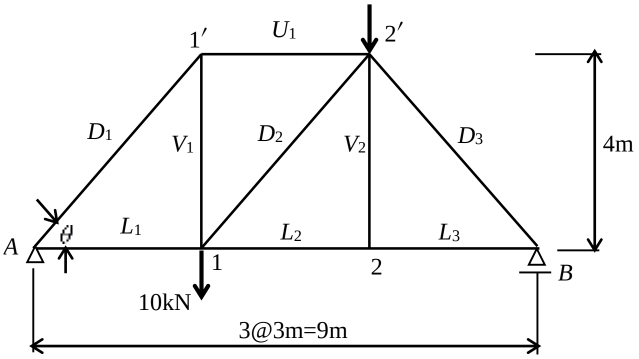


図 18.17

［**問題 18.2**］次のトラスの指定した部材力を求めよ．

(1)

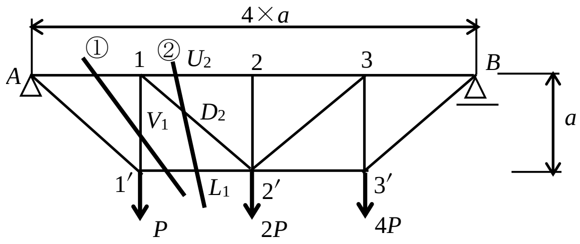


図 18.18

(2)

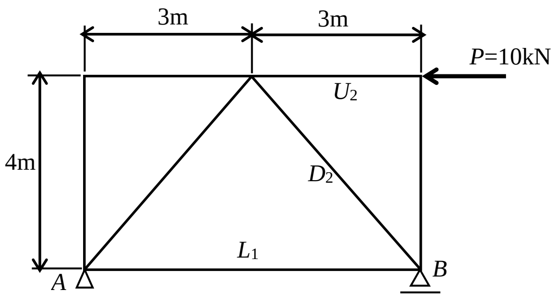


図 18.19

(3)

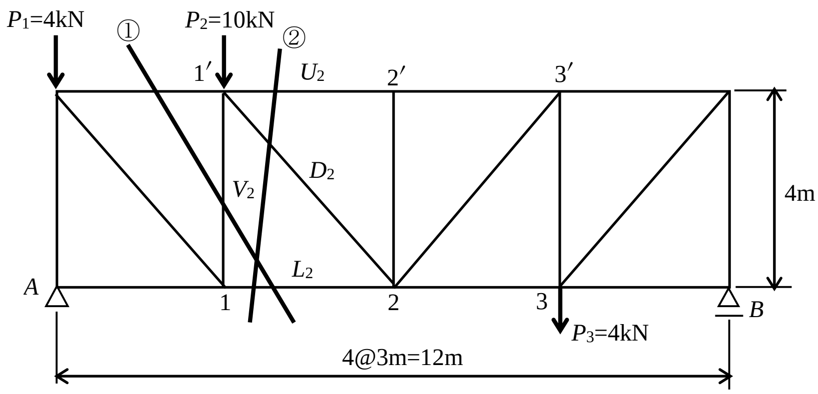


図 18.20

(4)

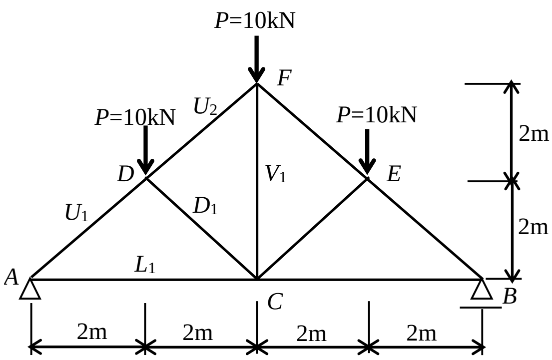


図 18.21

(5)

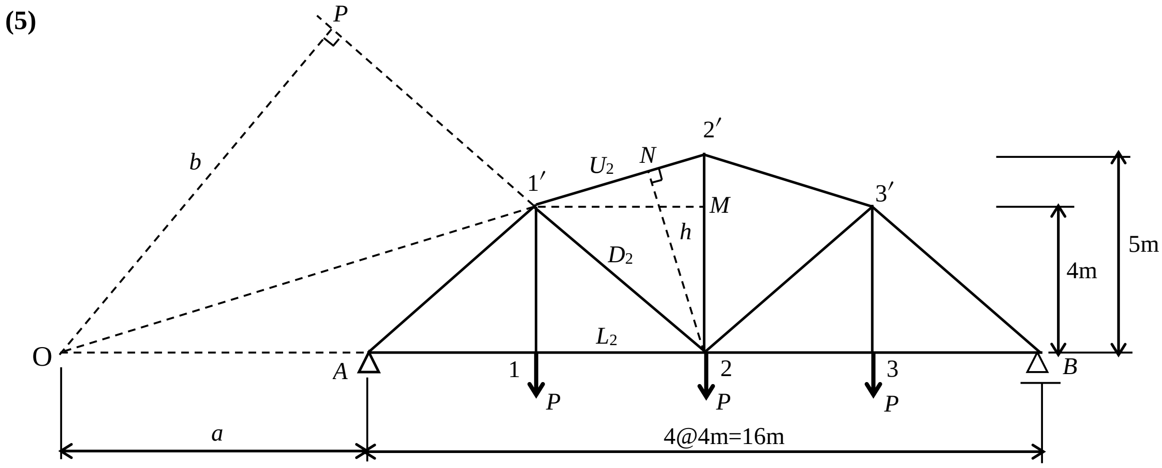


図 18.22

(6)

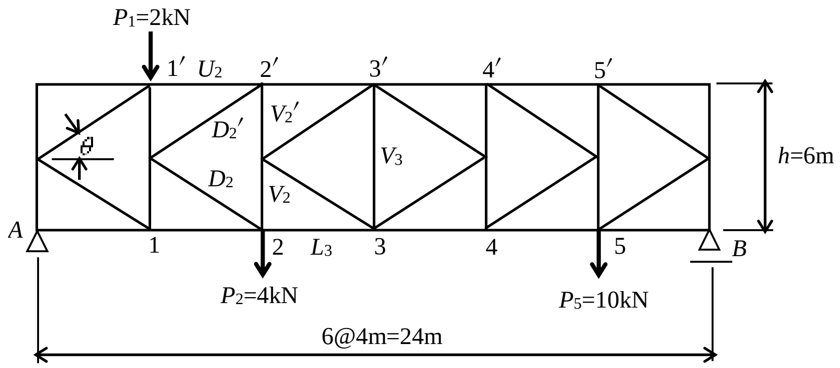


図 18.23

(7)

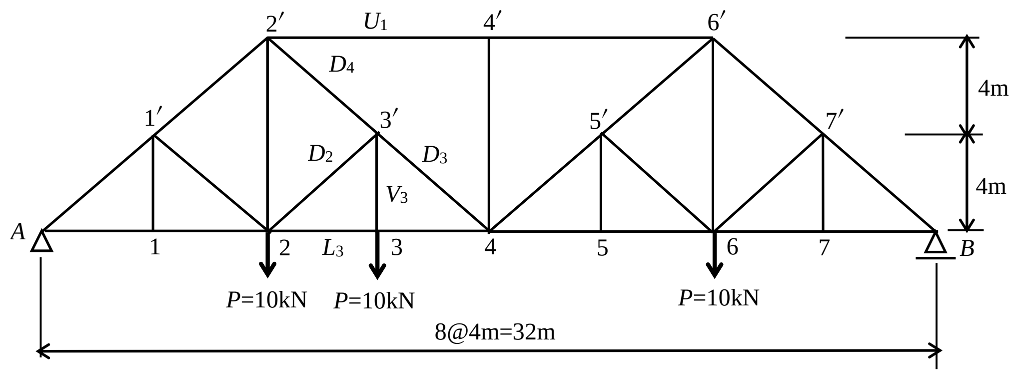
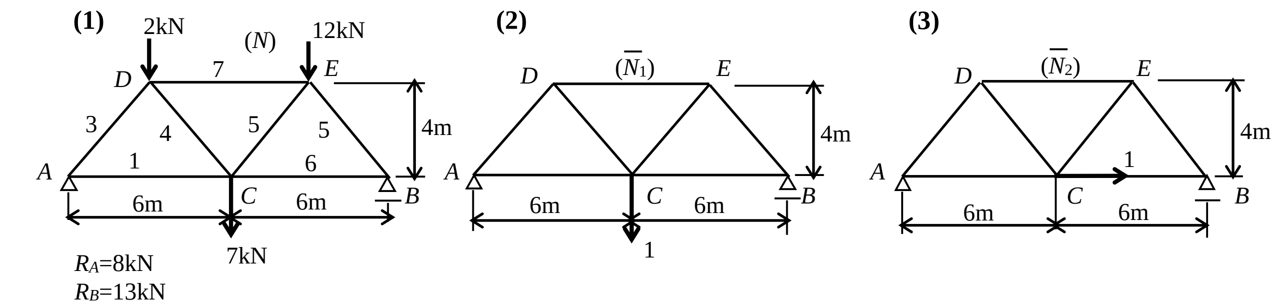
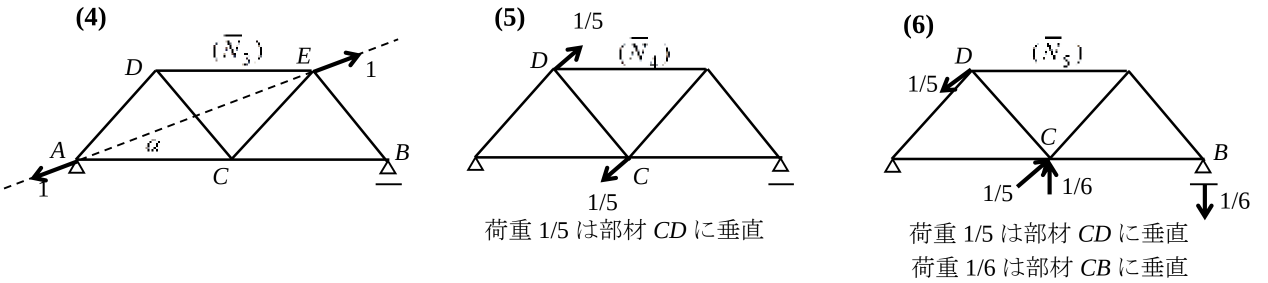


図 18.24

［**問題 18.3**］次のトラスの部材力を求めよ．*EA* は一定とする．また，図中の数字は部材番号を表す．



部材	l	N	$\bar{N}_1$	$\bar{N}_2$
1	6			
2	6			
3	5			
4	5			
5	5			
6	5			
7	6			



部材	l	$\bar{N}_3$	$\bar{N}_4$	$\bar{N}_5$
1	6			
2	6			
3	5			
4	5			
5	5			
6	5			
7	6			

図 18.25