15 簡単な棒のねじり

断面一様な真直ぐな棒の両端にねじりモーメント M_t のみを作用させた状態のねじりを**純ねじり**あるいは **Saint-Venant のねじり**という．

15.1　中実丸棒のねじり

Hooke の法則が成り立つものとし，ねじりを受けても断面は平面を保つものと仮定する．

図の中実で円形断面の棒にねじりモーメント M_t を作用させる．

固定端から x の点の微小距離 dx を考えると，その中の微小要素 $abcd$ は，ねじりによって $abc'd'$ にせん断変形し，せん断応力 τ を生じる．このとき，ac と ac' のなす角 γ をせん断ひずみと定義し

$$\gamma = \frac{cc'}{ac'} = \frac{rd\varphi}{dx} = r\theta \tag{15.1}$$

の関係が成り立つ（図 b）．ここに

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \tag{15.2}$$

この θ は dx の区間で $d\varphi$ のねじり角が生じるので，式(2)を**単位長さあたりのねじり角**という．Hooke の法則から

$$\tau = G\gamma = Gr\theta \qquad G\ ：せん断弾性係数 \tag{15.3}$$

が得られる．中心より ρ の距離のせん断応力 τ_ρ は（図 c）

$$\tau_\rho = G\theta\cdot\rho \tag{15.4}$$

せん断応力の合力はねじりモーメント M_t に等しいから（図 d）

$$M_t = \int_A r(\tau dA) = G\theta\int_A r^2 dA = GI_P\theta \tag{15.5}$$

ただし，

$$I_P = \int_A r^2 dA,\qquad 極 2 次モーメント \tag{15.6}$$

式(15.5)より，単位長さあたりのねじり角は

$$\theta = \frac{M_t}{GI_P} \tag{15.7}$$

したがって，全ねじり角は

$$\varphi = \theta l = \frac{M_t l}{GI_P} \tag{15.8}$$

任意点 ρ でのせん断応力は，式(15.4)より

$$\tau_\rho = \frac{M_t}{I_P}\rho \tag{15.9}$$

せん断応力は，中心で 0，円周上で最大値をとる．

中実丸棒の場合

$$\left.\begin{aligned} I_P &= \int r^2 dA = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi d^2}{8} \\ \theta &= \frac{M_t}{GI_P} = \frac{M_t}{G}\frac{2}{\pi r^4} = \frac{M_t}{G}\frac{32}{\pi d^4} \\ \tau_{max} &= \frac{M_t}{I_P}r = \frac{2M_t}{\pi r^3} = \frac{16M_t}{\pi d^3} \end{aligned}\right\} \tag{15.10}$$

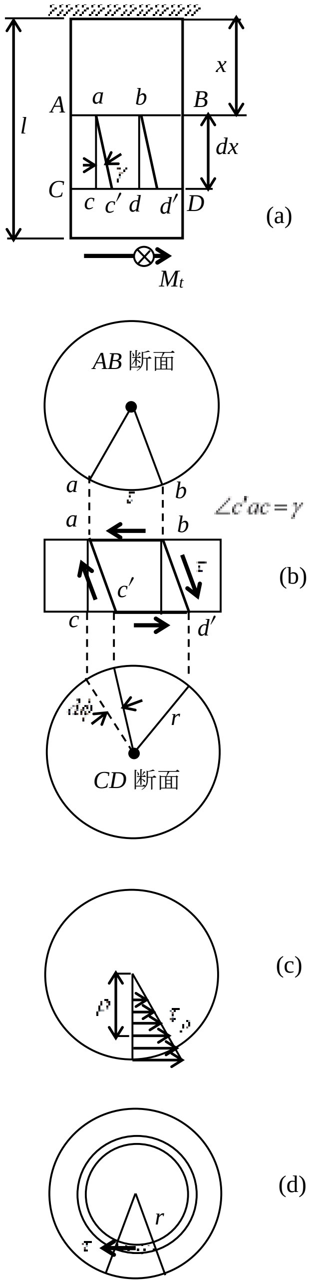

図 15.1　丸棒のねじり

15.2　中空丸棒のねじり（厚肉管）

右図のように内径 a，外形 b の中空丸棒を考える．この場合の極 2 次モーメントは

$$I_P = \frac{\pi}{2}(b^4 - a^4) \tag{15.11}$$

であるから，式(15.9)より

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_P} b = \frac{2M_t b}{\pi(b^4 - a^4)} \tag{15.12}$$

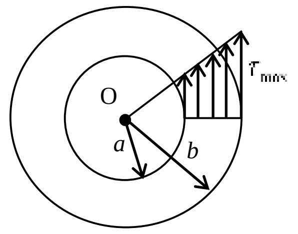

図 15.2　中空丸棒のねじり

いま，右図で $a=b/2$ の場合の断面積は $A=\pi b^2-\pi(b/2)^2=3\pi b^2/4$，外形 b の中実丸棒の断面積は $A'=\pi a^2$ であるから

$$\frac{A}{A'}=\frac{3}{4}=0.75 \tag{15.13}$$

すなわち，中空（$a=b/2$）丸棒は中実丸棒の 75%の面積になる．また，

$$\tau_{\max, a=b/2} = \frac{16}{15}\cdot\frac{2M_t b}{\pi b^4}, \quad \tau'_{\max, a=0} = \frac{2M_t b}{\pi b^4} \tag{15.14}$$

であるから

$$\frac{\tau_{\max, b=b/2}}{\tau'_{\max, b=0}} = \frac{15}{16} = 0.94 \tag{15.15}$$

となって，応力は中空丸棒が 6%の増加になる．すなわち，応力は 6%増加するが材料は 25%の節約になる．

15.3　薄肉管のねじり

管の半径に比べて，管厚がきわめて薄い場合（$a≒b$）を考える．この場合は，中心から管厚の中心までの距離 r と管厚 t を使用して

任意点 ρ は　$\rho \approx r$ (15.16)

断面積は　$A = 2\pi r \cdot t$ (15.17)

極 2 次モーメントは　$I_P = \int \rho^2 dA = r^2 \int dA = r^2 \cdot 2\pi r t = 2\pi r^3 t$ (15.18)

で計算する．

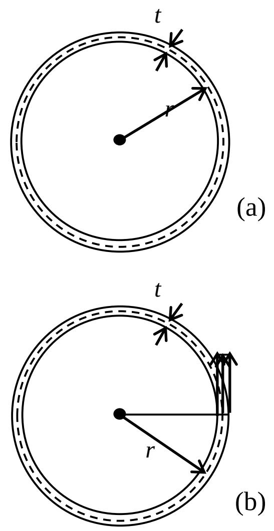

図 15.3　薄肉管のねじり

式(15.9)より

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2\pi r^2 t} \tag{15.19}$$

全ねじり角は

$$\varphi = \theta l = \frac{M_t l}{G I_P} = \frac{M_t l}{2\pi r^3 t G} \tag{15.20}$$

となる．

r が t に比べて極めて大きいということから管に生ずるせん断応力度は図(b)に示すように等分布に生じていると考えてよい．

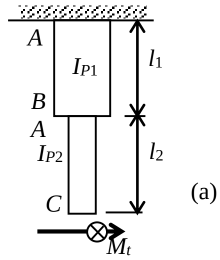

図 15.4　ねじり例 1

［**例題 15.1**］断面が変化する中実丸棒の先端にねじりモーメントが作用するとき，自由端のねじり角を求めよ．ただし，材料 1, 2 の極 2 次モーメントを I_{P1}, I_{P2} とする．

［**解**］ねじりモーメントはどの断面でも一様であるから，部材 *AB* に M_t が作用したときのねじりと，部材 *CD* に M_t が作用したときのねじりの和となる．

$$\varphi = \frac{M_t l_1}{GI_{P1}} + \frac{M_t l_1}{GI_{P1}} = \frac{M_t}{G}\left(\frac{l_1}{I_{P1}} + \frac{l_1}{I_{P1}}\right) \tag{15.21}$$

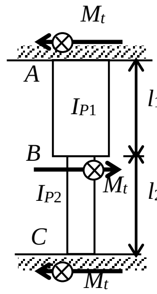

図 15.5　ねじり例 2

［**例題 15.2**］断面が変化する中実丸棒の点 *B* にねじりモーメント M_t が作用するとき，固定端 *A,C* に生ずる反力ねじりモーメントを求めよ．ただし，材料 1, 2 の極 2 次モー面とを I_{P1}, I_{P2} とする．

［**解**］この問題は 8 章［問題 8.8］と全く同様の考え方で求まる．
　まず，力釣合いから

$$M_A + M_C = M_t \tag{15.22}$$

つぎに，各部材の点 *B* でのねじり角は等しくなるから

$$\varphi_B = \frac{M_A l_1}{GI_{P1}} = \frac{M_C l_2}{GI_{P2}} \tag{15.23}$$

式(15.22),(15.23)を連立して解くと

$$M_A = \frac{M_t}{1 + \dfrac{I_{P2} l_1}{I_{P1} l_2}}, \quad M_A = \frac{M_t}{1 + \dfrac{I_{P1} l_2}{I_{P2} l_1}} \tag{15.24}$$

式(15.24)を式(15.23)に代入すると点 *B* でのねじり角が得られる．

$$\varphi_c = \frac{M_t l_1 l_2}{G(I_{P!} l_2 + I_{P2} l_1)} \tag{15.25}$$

ちょっと休憩［15－1］（タイヤ交換）

タイヤ交換で長さ 30cm のスパナの先端に，私（56kgf）が荷重をかけてボルトをまわすと，ねじりモーメント（トルク）は

　　T=56×0.3kgf･m=16.8kgf･m

となる．タイヤのボルト（M12 とする）が受ける最大のせん断応力（ねじり応力）は，式(17.10)より

$$\tau_{\max} = \frac{16 M_t}{\pi d^3} = \frac{16 \times 16\,800}{3.14 \times 12^3} = 49.5\,\mathrm{kgf/mm^2}$$

ボルト M12 の許容せん断応力度はいくらだろう？