14　長柱の座屈

長い柱は圧縮荷重によって折れてしまう場合がある．この現象を**座屈**といい，座屈するときの荷重を**座屈荷重**という．

14.1　換算長

長さ l の柱に荷重が作用する場合，その支持方法によって，柱の理論上の長さ L が異なる．長柱の計算は，この L を用いて行うと都合がよい．この L を**換算長**（あるいは**有効長さ**という）という．

座屈荷重は一般に

$$P_K = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \mu \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \tag{14.1}$$

したがって，座屈応力度は

$$\sigma_K = \frac{P_K}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} = \frac{\pi^2 EI}{(L/r)^2} = \frac{\pi^2 EI}{\lambda^2} \tag{14.2}$$

これは，**オイラーの公式**といわれるもので，一般に L/r>100 の場合に適用される．また，λ を**細長比**という．r は断面 2 次半径である．
換算長 L と，実際の長柱の長さ l との間に

$$\mu = \frac{l^2}{L^2} = \left(\frac{l}{L}\right)^2 \tag{14.3}$$

の関係がある．μ は長柱の支持方法によって決まる係数で，これを**換算係数**という．

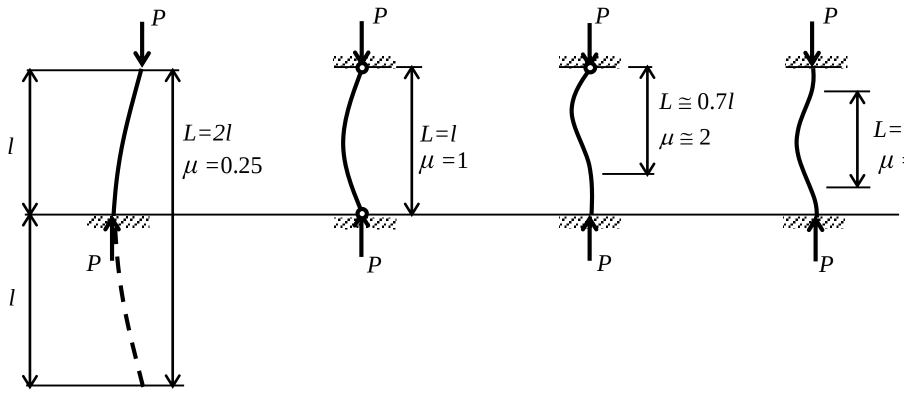


図 14.1　換算長と換算係数

μ は荷重に対する抵抗の強さを示しており，上図の左の系を基準 1 とすると，左から 1 : 4 : 8 : 16 の割合になっている．たとえば，両端単純支持の長柱は，一端固定他端自由の長柱の 4 倍の強さを持っていることを示している．

14.2　各種長柱公式

前に求めた両端ヒンジの長柱は Hooke の法則が成り立つ範囲で成立する．すなわち，この式は比例限度 σ_P よりも小さい範囲で適用しなければならない．

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_P \quad \text{より} \quad \lambda \ge \sqrt{\frac{E}{\sigma_P}}\pi = \lambda_P \tag{14.4}$$

この式において $E = 2.0\times10^5\ \mathrm{N/mm^2}, \sigma_P = 235\ \mathrm{N/mm^2}$ とすると，λ_P は約 92 となる．すなわち，λ は限界細長比よりも大きい範囲で成り立つ．これ以外の範囲 λ では次のような実験公式を用いる．

1)　**直線式（テトマイヤー式）**

$$\sigma_K = a - b\lambda \qquad (a, b：材料の性質から定まる定数) \tag{14.5}$$

2)　**双曲線式（ゴルドン・ランキン式）**

$$\sigma_K = \frac{a}{1 + b\lambda^2} \qquad (a, b：材料の性質から定まる定数) \tag{14.6}$$

3)　**放物線式（ジョンソン式）**

$$\sigma_K = a - b\lambda^2 \qquad (a, b：材料の性質から定まる定数) \tag{14.7}$$

これらの式の関係は次図のようになる．

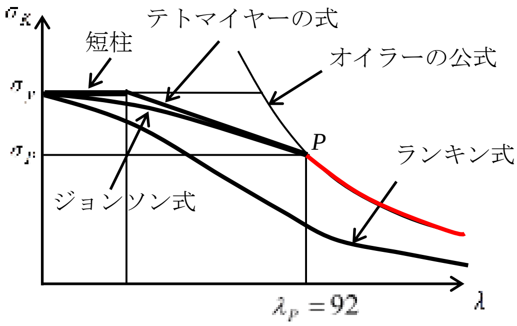


図 14.2　各種実験公式

わが国の鋼道路橋示方書では SS400，SM400 に対して許容応力度を次のように設定している（単位は N/mm²）．

$$\left.\begin{aligned} L/r \le 18: &\quad \sigma_{Ka} = 140 \\ 18 \le L/r \le 92: &\quad \sigma_{Ka} = 140 - 0.82\left(\frac{L}{r} - 18\right) \\ 92 \le L/r: &\quad \sigma_{Ka} = \frac{1\,200\,000}{6\,700 + \left(\frac{L}{r}\right)^2} \end{aligned}\right\} \tag{14.8}$$

14.3　各種長柱の座屈荷重

14.3.1　両端ヒンジ柱の座屈荷重

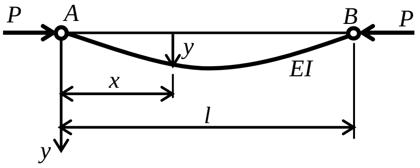


図 14.3　両端ヒンジの柱

両端ヒンジの柱に集中荷重 P が軸方向に作用している場合を考える．

支点 A より x の点のたわみを y とすると，この点での曲げモーメントは

$$M_x = Py \tag{14.9}$$

これを弾性曲線の微分方程式に代入すると

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{P}{EI}y \tag{14.10}$$

ここで

$$k^2 = \frac{P}{EI} \tag{14.11}$$

とおくと

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0 \tag{14.12}$$

が得られる．式(14.12)の一般解は次のように得られる．

$$y = A\cos kx + B\sin kx \tag{14.13}$$

ここに，A,B は積分定数である．境界条件を適用すると

$$\left.\begin{aligned} x = 0 : y = 0 \rightarrow A = 0 \\ x = l : y = 0 \rightarrow B\sin kl = 0 \end{aligned}\right\} \tag{14.14}$$

式(14.14)の第 2 式において B が 0 であれば式(14.13)は成り立たないから $B \neq 0$ とおくと

$$\sin kl = 0 \tag{14.15}$$

この式を座屈条件式という．これより

$$kl = n\pi \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{14.16}$$

これを式(18.11)に代入すると

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2} \tag{14.17}$$

したがって，たわみ式は式(14.13)より

$$y = B\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{14.18}$$

この式の B は不定であり，形状は決まらない．ここでは，n が最小($n=1$)の場合が意味を持ち，**座屈荷重**は次のようになる．

$$P_K = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{14.19}$$

したがって，**座屈応力度**は

$$\sigma_K = \frac{P_K}{A} = \frac{\pi^2 EI}{l^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(l/r)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{14.20}$$

この式で，$r = \sqrt{I/A}$ は断面 2 次半径，$\lambda = l/r$ は細長比を表す．

式(14.19)は **Euler の座屈荷重**といわれ，Hooke の法則が成り立つ範囲で成立する．

14.3.2　一端固定・他端自由の柱の座屈荷重

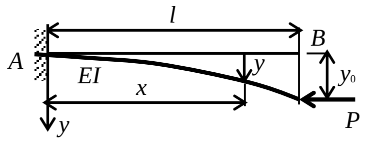


図 14.4　一端固定・他端自由の柱

図において点 x の曲げモーメントは

$$M_x = -P(y_0 - y) \tag{14.21}$$

これを弾性曲線の微分方程式に代入すると

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = \frac{P}{EI} y_0 \tag{14.22}$$

これより次式を得る．

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = k^2 y_0 \tag{14.23}$$

ここに

$$k^2 = \frac{P}{EI} \tag{14.24}$$

式(14.23)の一般解は

$$y = A\cos kx + B\sin kx + y_0 \tag{14.25}$$

この式の A,B は積分定数である．境界条件を適用すると

$$\left.\begin{aligned} &x = 0 : y = 0 \rightarrow A = -y_0 \\ &x = 0 : \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow B = 0 \end{aligned}\right\} \tag{14.26}$$

これよりたわみは

$$y = y_0(1 - \cos kx) \tag{14.27}$$

この式で y_0 は不定であるが，$x = l : y = y_0$ より $y_0 \cos kl = 0$ が得られる．ここで $y_0 \neq 0$ であるから座屈条件式は

$$\cos kl = 0 \tag{14.28}$$

これを満足する最小の根は $kl = \pi/2$ であるから，座屈荷重は

$$P_K = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \tag{14.29}$$

座屈応力度は

$$\sigma_K = \frac{P_K}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\left(2\frac{l}{r}\right)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{14.30}$$

この式で，$r = \sqrt{I/A}$ は断面 2 次半径，$\lambda = l/r$ は**細長比**を表す．

この系の強度は式(14.30)より両端ヒンジの場合の 1/4 であることが分かる．

14.3.3　両端固定の柱の座屈荷重

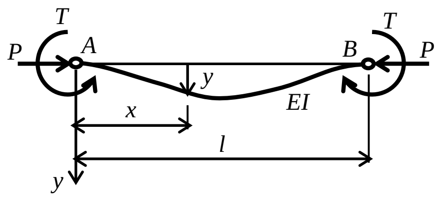


図 14.5　両端固定の柱

両端ヒンジの柱に集中荷重 P と，点 A,B のたわみ角が 0 となるような曲げモーメント M が作用している場合を考える．

支点 A より x の点のたわみを y とすると，この点での曲げモーメントは

$$M_x = Py - T \tag{14.31}$$

これを弾性曲線の微分方程式に代入すると

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = \frac{P}{EI}\frac{T}{P} \tag{14.32}$$

これより

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = k^2 \frac{T}{P} \tag{14.33}$$

ここに

$$k^2 = \frac{P}{EI} \tag{14.34}$$

式(14.33)の一般解はつぎのようになる．

$$y = A\cos kx + B\sin kx + \frac{T}{P} \tag{14.35}$$

ここに，A,B は積分定数である．境界条件を適用すると

$$\left.\begin{aligned} &x=0 : y=0 \to A=-\frac{T}{P} \\ &x=0 : \frac{dy}{dx}=0 \to B=0 \end{aligned}\right\} \tag{14.36}$$

したがって，たわみ式は式(14.26)より

$$y = \frac{T}{P}(1-\cos kx) \tag{14.37}$$

また，$x=l : y=0,\ \dfrac{dy}{dx}=0$ より

$$1-\cos kl = 0 \quad \text{および} \quad \sin kl = 0 \tag{14.38}$$

この座屈条件式を満足する最小値は $kl = 2\pi$ となる．したがって，座屈荷重は

$$P_K = \frac{\pi^2 EI}{(l/2)^2} \tag{14.39}$$

座屈応力度は

$$\sigma_K = \frac{P_K}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(l/2)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{1}{2}\frac{l}{r}\right)^2} = 4\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{14.40}$$

この式で，$r=\sqrt{I/A}$ は断面 2 次半径，$\lambda = l/r$ は**細長比**を表す.

この系は，式(14.40)より両端ヒンジの柱の 4 倍の強さを示している.

14.3.4　一端固定・他端ヒンジの柱の座屈荷重

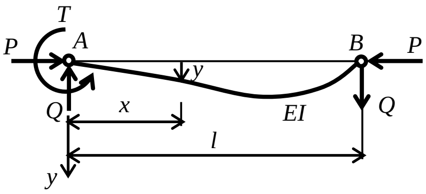


図 14.6　一端固定・他端ヒンジの柱

両端ヒンジの柱に集中荷重 P と，点 A のたわみ角が 0 となるような曲げモーメント M が作用している場合を考える．この場合，釣合いが成立するように両端に垂直反力

$$Q = \frac{T}{l} \tag{14.41}$$

が図示のように作用する．

支点 A より x の点のたわみを y とすると，この点での曲げモーメントは

$$M_x = Py - Q(l - x) \tag{14.42}$$

これを弾性曲線の微分方程式に代入すると

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = \frac{P}{EI}\frac{Q}{P}(l - x) \tag{14.43}$$

これより

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = k^2 \frac{Q}{P}(l - x) \tag{14.44}$$

ここに

$$k^2 = \frac{P}{EI} \tag{14.45}$$

式(14.44)の一般解は

$$y = A\cos kx + B\sin kx + \frac{Q}{P}(l - x) \tag{14.46}$$

ここに，A,B は積分定数である．境界条件を適用すると

$$\left.\begin{aligned} &x = 0 : y = 0 \to A = -\frac{Q}{P} l \\ &x = 0 : \frac{dy}{dx} = 0 \to\ B = \frac{Q}{kP} \end{aligned}\right\} \tag{14.47}$$

したがって，たわみ式は式(14.46)より

$$y = \frac{Q}{P}\left[-l\cos kx + \frac{1}{k}\sin kx + (l - x) \right] \tag{14.48}$$

また，$x = l : y = 0$ より次の座屈条件式が得られる．

$$\tan kl = kl \tag{14.49}$$

この式を満足する値は $kl = 4.493, 7.725, 10.904, 14.066, \cdots$，このうちの最小値をとって座屈荷重は

$$P_K = \frac{20.19EI}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2} = 2.04\frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{14.50}$$

したがって，座屈応力度は

$$\sigma_K = \frac{P_K}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\left(0.7\dfrac{l}{r}\right)^2} \approx 2\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{14.51}$$

この式で，$r = \sqrt{I/A}$ は断面 2 次半径，$\lambda = l/r$ は**細長比**を表す．

この系は，式(14.50)より両端ヒンジの柱の 2 倍の強さを示している．

14.3.5　任意横分布荷重が作用するはりの座屈微分方程式

一般に横荷重の作用する座屈の微分方程式を導く．軸方向荷重 P と横荷重 $q(x)$が作用した場合を考える．

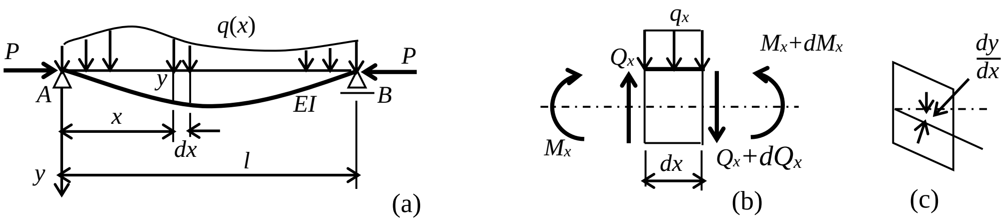


図 14.7　任意分布荷重の作用する単純支持の柱

微小要素 dx を取り出し，それが変形した状態を図(c)とする．

$$\sum V = 0\ : -Q_x + q_x dx + (Q_x + dQ_x) = 0.,\ \frac{dQ_x}{dx} = -q \tag{14.52}$$

つぎに

$$\sum M = 0:\ M_x + q_x dx\frac{dx}{2} + (Q_x + dQ_x)dx - (M_x + dM_x) + P\frac{dy}{dx}dx = 0 \tag{14.53}$$

2 次の微小項を無視すると

$$Q_x dx - dM_x + P\,dy = 0 \tag{14.54}$$

ゆえに

$$\frac{dM_x}{dx} - P\frac{dy}{dx} = Q_x \tag{14.55}$$

1 回微分して

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} - P\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dQ_x}{dx} \tag{14.56}$$

ここで,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI},\quad \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{1}{EI}\frac{d^2 M_x}{dx^2} \tag{14.57}$$

式(14.57)の第 2 式と式(14.52)を式(14.56)に代入すると

$$EI\frac{d^4 y}{dx^4} + P\frac{d^2 y}{dx^2} = q_x \tag{14.58}$$

ここで，q_x=0 とおくと

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + k^2\frac{d^2 y}{dx^2} = 0,\ \text{ただし}\quad k^2 = \frac{P}{EI} \tag{14.59}$$

これが横荷重の作用しないときの座屈の微分方程式である．この一般解は

$$y = A\cos kx + B\sin kx + Cx + D \tag{14.60}$$

式(14.59)は横荷重 $q(x)$が作用するときの座屈微分方程式である．この式より

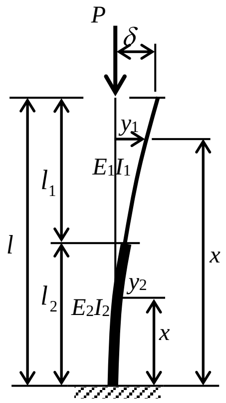
$$\frac{d^4 y}{dx^4} + k^2\frac{d^2 y}{dx^2} = k^2\frac{q_x}{P} \tag{14.61}$$

この式の一般解は

$$y = A\cos kx + B\sin kx + Cx + D + \frac{q_x}{2P}x^2 \tag{14.62}$$

式(14.62)に境界条件を適用すれば解が得られる．

［**例題 14.1**］次の座屈応力度を求めよ



14.8 曲げ剛性の変化する柱

［解］

1)　$l_2 \le x \le l$ の場合：

曲げモーメント：$M_x = -P(\delta - y_1)$

これを弾性曲線の微分方程式に代入すると

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{M_x}{E_1 I_1} = \frac{P}{E_1 I_1}(\delta - y_1)$$

ここで

$$k_1^2 = \frac{P}{E_1 I_1}$$

とおくと

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + k_1^2 y_1 = k_1^2 \delta$$

この式の一般解は次のように得られる

$$y_1 = A\cos k_1 x + B\sin k_1 x + \delta$$

ここに，A,B は積分定数である．

$$\theta_1 = \frac{dy_1}{dx} = -k_1 A \sin k_1 x + k_1 B \cos k_1 x$$

境界条件：　$x = l : y_1 = \delta$ より

$$A = -B \tan k_1 l$$

2)　$x \le l_2$ の場合：

曲げモーメント：$M_x = -P(\delta - y_2)$

これを弾性曲線の微分方程式に代入すると

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = -\frac{M_x}{E_2 I_2} = \frac{P}{E_2 I_2}(\delta - y_2)$$

ここで

$$k_2^2 = \frac{P}{E_2 I_2}$$

とおくと

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + k_2^2 y_2 = k_2^2 \delta$$

この式の一般解は次のように得られる

$$y_2 = C\cos k_2 x + D\sin k_2 x + \delta$$

ここに，C,D は積分定数である．

$$\theta_2 = \frac{dy_2}{dx} = -k_2 C \sin k_2 x + k_2 D \cos k_2 x$$

境界条件：　$x = 0 : y_2 = 0$ より $C = -\delta$

　　　　　　$x = 0 : \theta_2 = 0$ より $D = 0$

したがって，　$y_2 = \delta(1 - \cos k_2 x)$

連続条件；　$x = l_2 : y_1 = y_2$　より　　$B = \dfrac{\delta \cos k_2 l_2 \cos k_1 l}{\sin k_1 l_1}$

　　　　　　$x = l_2 : \theta_1 = \theta_2$　より　　$\dfrac{k_1}{k_2} = \tan k_1 l_1 \tan k_2 l_2$

ここで，$k_1 l_1 = k_2 l_2 = \dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{P}{EI}}$　の特別の場合には

$$\tan^2\left(\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)=1$$

となるから

$$\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}=\frac{\pi}{4}$$

が得られる.

よって座屈荷重は

$$P_K=\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

となる.

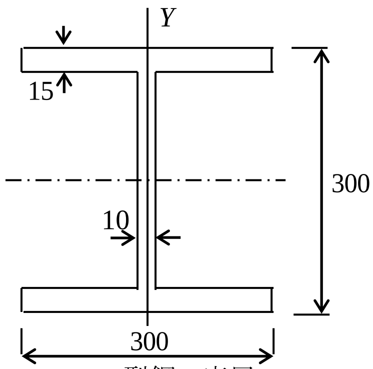
また，座屈応力度は

$$\sigma_K=\frac{P_K}{A}=\frac{\pi^2 EI}{4Al^2}=\frac{\pi^2 r^2 E}{4l^2}=\frac{\pi^2 E}{4(l/r)^2}=\frac{\pi^2 E}{4\lambda^2}$$

ここに，$r=\sqrt{I/A}$ は断面 2 次半径，$\lambda=l/r$ は細長比を表す.

［**例題 14.2**］作用荷重 P=140tf, 長さ l=4m の H 型鋼の座屈荷重を求めよ（工学単位）.

H 型鋼 : $300\times300\times10\times15$



14.9 H 型鋼の座屈

規格表より

$I_x=20{,}200\text{cm}^4$

$I_x=\ \ 6{,}750\text{cm}^4$

$A=118.4\text{cm}^2$

$r_y=7.55\text{cm}$

［**解**］細長比は

$$\lambda=\frac{l}{r_y}=\frac{400}{7.55}=53.0$$

1) 鋼材 SS400 の場合：

$20\le\lambda\le93$ よりテトマイヤーの式を使う.

$$\sigma_{Ka}=1400-8.4(\lambda-20)=1400-8.4(53.0-20)=1122.8\text{kg/cm}^2$$

ゆえに，座屈荷重は

$$P_K=\sigma_{Ka}\cdot A=1328.40\text{kgf}=132.9\text{tf}<140\text{t}$$

2) 鋼材 SM490 の場合：

$15\le\lambda\le80$ よりテトマイヤーの式を使う.

$$\sigma_{Ka}=1900-13(\lambda-15)=1900-13(53.0-15)=1406\text{kg/cm}^2$$

$$P_K=\sigma_{Ka}\cdot A=1406\times118.4=166470.4\text{kgf}=166.5\text{tf}>140\text{t}$$