13 短柱

まっすぐな部材が軸方向の圧縮力を受けているとき，これを一般に**柱**という．柱は**短柱**と**長柱**に分けられるが，一般に短柱は押しつぶされ，長柱は座屈する．ここでは短柱を取り扱うが，短柱の場合，圧縮力が図心軸上に作用する場合と，図心軸から外れた位置に作用する場合で計算方法が異なる．

13.1　軸方向圧縮力が断面の図心に作用する短柱

軸方向圧縮力が断面の図心に作用する場合，圧縮力を P，柱の断面積を A とすると，柱に生じている圧縮応力度は

$$\sigma_c = -\frac{P}{A} \tag{13.1}$$

で求められる．

13.2　偏心荷重を受ける短柱

図(a)のように図心軸から x 軸上に距離 e だけ離れた点に荷重 P が作用する場合を考える．このような荷重を**偏心荷重**，距離 e を**偏心距離**という．

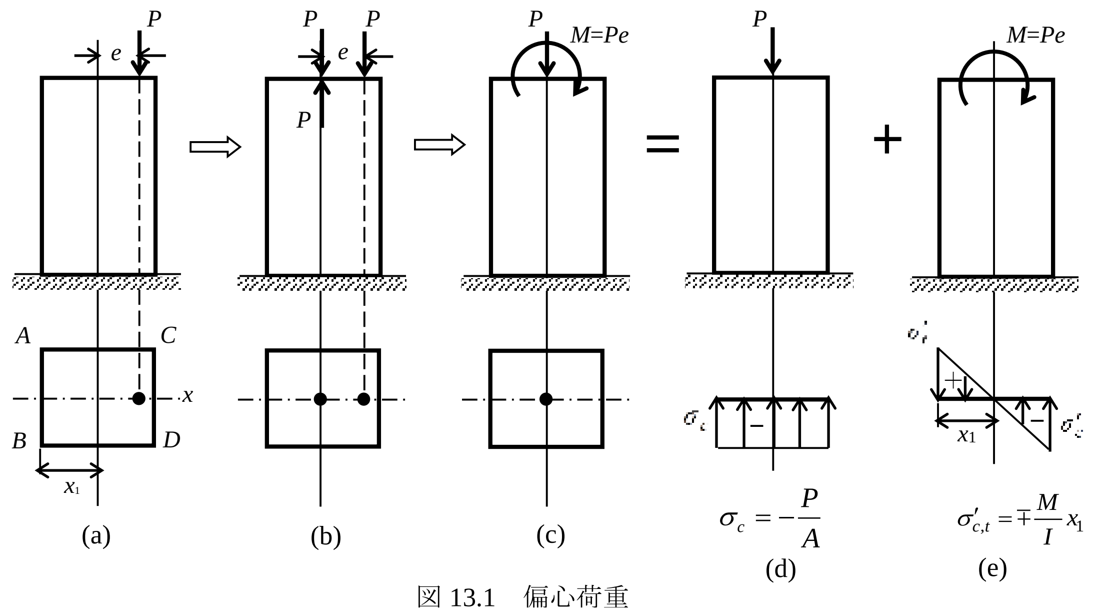


図 13.1　偏心荷重

偏心荷重 *P* は次のように考える．

(1)　図(b)に示すように柱の図心位置に大きさ P の力を相対する向きに作用させる．このようにしてもこの相対する力は打ち消しあって図(a)と力学的効果は変わらない．

(2)　図心に作用する上向きの力 P と最初の力 P は M=Pe の偶力をなす．

(3)　したがって図(c)に示すように図(a)の力は，図心に作用する集中力 P と偶力の 2 力に置き換えられることになる．

(4)　図(c)すなわち図(a)は図(d)と図(e)を加えたものとして成り立つ．したがって断面の辺 AB,CD の応力は次式で与えられる

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{AB}\\ \sigma_{CD}\end{array}\right\} = -\frac{P}{A} \pm \frac{M}{I}x = -\frac{P}{A} \pm \frac{Pe}{I}x \qquad \text{（圧縮応力度を負，引張応力度を正とする）} \tag{13.2}$$

(5)　上式で偏心距離 e が大きくなり，曲げモーメントが大きくなると，辺 AB の応力度 σ_{AB} が圧縮から引張りになる場合が生じる．

式(13.2)を変形すると

$$\sigma_{AB} = -\frac{P}{A} + \frac{Pe}{I} x_1 = -\frac{P}{W}\left(\frac{W}{A} - e\right) \tag{13.3}$$

となり

$$e = \frac{W}{A} \quad （ここに，W = \frac{I}{x_1} は断面係数） \tag{13.4}$$

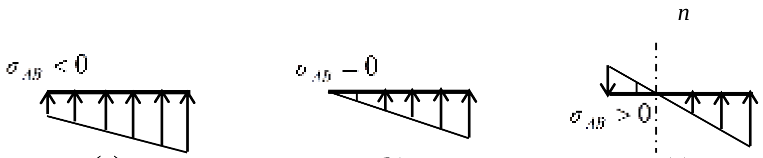
のとき $\sigma_{AB} = 0$ となる．これより，次の関係が得られる．

$e < \dfrac{W}{A}$ のとき断面全体は圧縮応力（中立軸は断面外にある）

$e = \dfrac{W}{A}$ のとき辺 AB の応力は 0（中立軸は断面に接する）

$e > \dfrac{W}{A}$ のときは辺 AB には引張り応力（中立軸は断面内にある）

が働くことになる（図 13.2）．



(a)　(b)　(c)

図 13.2　偏心応力

コンクリートや石材は引張りに弱いため，図(c)の状態が生じないよう注意しなければならない．ここで，特に

$$k = \frac{W}{A} \tag{13.5}$$

とおいてこれを核半径という．

(6)　**矩形断面の核**

下図のような矩形断面において，x 軸に対する核半径は

$$k = \frac{W}{A} = \frac{bh^2/6}{bh} = \frac{h}{6} \tag{13.6}$$

であるから，y 軸上に図心から $h/6$ の位置に 2 点 K_1，K_2 が得られる．

同様にして x 軸上に 2 点 K_3，K_4 が得られる．これらの点を核点といい，これらの 4 点を頂点とする平行四辺形を核という．

上記(5)に見られるように，断面に引張り応力が生じないようにするためには，荷重 P が核の内部にあることが必要である．

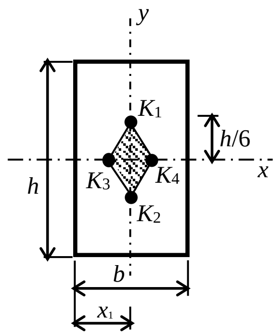


図 13.3 核

［問］半径 r の円形断面の核半径はいくらか．

［答］$k=r/4$

13.3　構造物の安定

構造物が安定であるためには

「転倒しないこと，滑り出さないこと，地盤の支持力があること」

の 3 つの条件が必要である．

［**例題 13.1**］図のような重さ 10kN の物体が水平力 2kN を受けているとき安定しているかどうかを検討する．

［解］　奥行き 1m と考える．

底面の中点 m に対するモーメントは

$$M = 2\times 2 = 4\,\mathrm{kNm}$$

これより，偏心距離は

$$e = \frac{M}{W} = \frac{4}{10} = 0.4\mathrm{m} < \frac{h}{6} = 0.5$$

ゆえに，重さと水平力の合力の作用点は核の中にある．

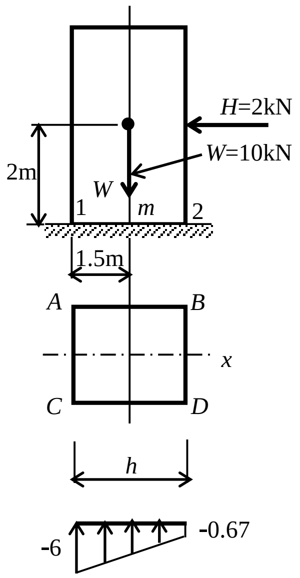


図 13.4

(1)　地盤反力

地盤反力は矩形断面であるから式(6.1)より

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{CD}\\ \sigma_{AB}\end{matrix}\right\} = -\frac{P}{A} \pm \frac{M}{I}x = -\frac{P}{A} \pm \frac{Pe}{I}x = -\frac{P}{bh}\left(1 \mp \frac{6e}{h}\right)$$

$$= -\frac{10}{1\times 3}\left(1 \mp \frac{6\times 0.4}{3}\right) = \begin{cases}-0.67\\ -6\end{cases} \mathrm{kN/m^2}$$

許容地耐力を $\sigma_a = -10\mathrm{kN/m^2}$ とすると，安全である．

(2)　転倒

転倒に対する安全は点 1 について考えると

$$n = \frac{W\cdot 1.5}{H\cdot 2} = \frac{15}{4} = 3.7$$

転倒に対する安全率を 1 とすると安全である．

(3)　すべり

すべりに対しては，すべり摩擦係数を $\mu = 0.3$ とすると

$$n = \frac{\mu W}{H} = \frac{0.3\times 10}{2} = 1.5$$

となる．すべりに対する安全率を 1 とすると安全である．

安全率，地耐力，すべり摩擦係数等はあらかじめ与えられるものである．ここでは適当に定めた．

［**例題 13.2**］図のように図心軸から x 軸上に偏心距離 e=100mm だけ離れた点に荷重 P=10kN が作用するとき辺 AB,CD に生じる応力を求めよ.

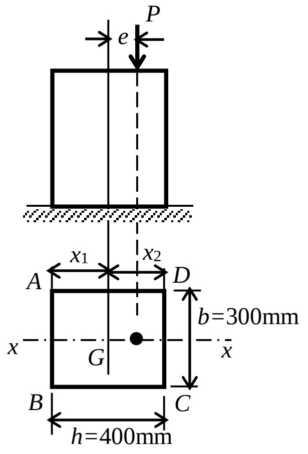


図 13.5

［**解**］断面積 $A=bh=300\times400=12\times10^4\mathrm{mm}^2$

断面 2 次モーメント $I=\dfrac{bh^3}{12}=\dfrac{300\times400^3}{12}=16\times10^8\,\mathrm{mm}^4$

曲げモーメント $M=Pe=10000\times100=100\times10^4\,\mathrm{Nmm}$

式(6.1)から

$$\sigma_{AB}=-\frac{P}{A}+\frac{M}{I}x_1=-\frac{10\,000}{12\times10^4}+\frac{100\times10^4}{16\times10^8}\times200$$

$$=4.17\times10^{-2}\,\mathrm{N/mm^2}$$

$$\sigma_{CD}=-\frac{P}{A}+\frac{M}{I}x_2=-\frac{10\,000}{12\times10^4}-\frac{100\times10^4}{16\times10^8}\times200$$

$$=-20.83\times10^{-2}\,\mathrm{N/mm^2}$$

AB に引張りを生じさせないためには式(6.3)より

$$e\le\frac{W}{A}=\frac{bh^2/6}{bh}=\frac{h}{6}=66.6\mathrm{mm}$$

［**例題 13.3**］図のような位置に荷重 P=10kN が作用するとき A,B,C,D に生じる応力を求めよ.

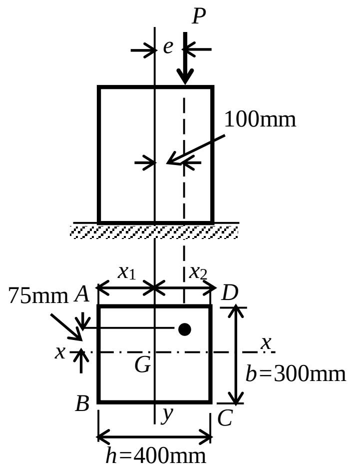


図 13.6

［**解**］$A=12\times10^4\mathrm{mm}^2$

$$M_x=10000\times100=100\times10^4\,\mathrm{Nmm}$$

$$M_y=10000\times75=75\times10^4\,\mathrm{Nmm}$$

$$W_{AB}=W_{CD}=\frac{bh^2}{6}=\frac{300\times400^2}{6}=800\times10^4\,\mathrm{cm}^3$$

$$W_{AD}=W_{BC}=\frac{hb^2}{6}=\frac{400\times300^2}{6}=600\times10^4\,\mathrm{cm}^3$$

$$\sigma\ =\frac{P}{A}=\frac{10\,000}{12\times10^4}=0.0833\,\mathrm{N/mm^2}$$

$$\sigma_{AB}=\frac{M_x}{W_{AB}}=\frac{100\times10^4}{800\times10^4}=0.125\,\mathrm{N/mm^2}=-\sigma_{CD}$$

$$\sigma_{BC}=\frac{M_y}{W_{BC}}=\frac{75\times10^4}{600\times10^4}=0.125\,\mathrm{N/mm^2}=-\sigma_{AD}$$

したがって各点の応力は

$$\sigma_A=\sigma+\sigma_{AB}+\sigma_{AD}=-0.0833+0.125-0.125=-0.0833\,\mathrm{N/mm^2}$$

$$\sigma_B=\sigma+\sigma_{AB}+\sigma_{BC}=-0.0833+0.125+0.125=0.1667\,\mathrm{N/mm^2}$$

$$\sigma_C=\sigma+\sigma_{CD}+\sigma_{BC}=-0.0833-0.125+0.125=-0.0833\,\mathrm{N/mm^2}$$

$$\sigma_D=\sigma+\sigma_{CD}+\sigma_{AD}=-0.0833-0.125-0.125=-0.3333\,\mathrm{N/mm^2}$$

この応力状態を図示すると右図のようになる.

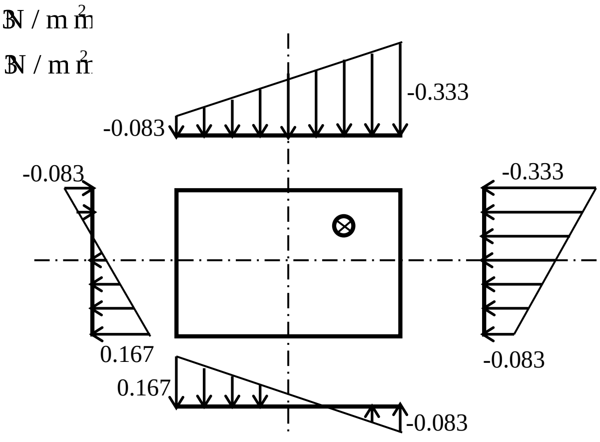


図 13.7

［**例題 13.4**］円形断面の短柱に図のような点に荷重 P=10kN が作用するとき A,B,C,D に生じる応力を求めよ．

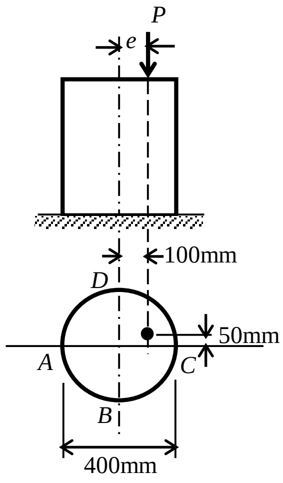


図 13.8

［解］断面積　$A=\pi r^2=3.14\times 200^2=12.56\times 10^4\,\mathrm{mm}^2$,

断面係数　$W_x=W_y=\dfrac{\pi D^3}{32}=628\times 10^4\,\mathrm{mm}^3$

式(6.1)から

$$\sigma_A=-\frac{P}{A}+\frac{M_x}{W_y}=-\frac{10\,000}{12.56\times 10^4}+\frac{10\,000\times 100}{628\times 10^4}=7.96\times 10^{-2}\ \mathrm{N/mm^2}$$

$$\sigma_B=-\frac{P}{A}+\frac{M_y}{W_x}=-\frac{10\,000}{12.56\times 10^4}+\frac{10\,000\times 50}{628\times 10^4}=0\ \mathrm{N/mm^2}$$

$$\sigma_C=-\frac{P}{A}-\frac{M_x}{W_y}=-\frac{10\,000}{12.56\times 10^4}-\frac{10\,000\times 100}{628\times 10^4}=-23.89\times 10^{-2}\ \mathrm{N/mm^2}$$

$$\sigma_A=-\frac{P}{A}+\frac{M_x}{W_y}=-\frac{10\,000}{12.56\times 10^4}-\frac{10\,000\times 50}{628\times 10^4}=-15.92\times 10^{-2}\ \mathrm{N/mm^2}$$

［**例題 13.5**］図のようなコンクリート擁壁の側面中央に P=10kN の力が作用しているとき，点 B に引張り応力が生じないような擁壁の幅 x を求めよ．ただし，コンクリート擁壁の単位重量を 2.4kN/m³ とする．

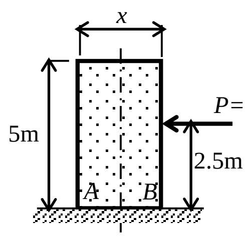


図 13.9

［解］　力 P=10kN によるコンクリート擁壁底面の受ける曲げモーメントは

$$M=10\times 2.5=25\mathrm{kN\,m}$$

コンクリート擁壁は奥行き 1m とすると，AB 面の断面係数は

$$W=\frac{bx^2}{6}=\frac{1\times x^2}{6}=\frac{x^2}{6}\,\mathrm{m}^3$$

コンクリート擁壁の自重は奥行き 1m につき

$$2.4\times x\times 5\times 1=12x(\mathrm{kN}$$

自重による圧縮応力度は

$$\sigma_c=-\frac{P}{A}=-\frac{12x}{x}=-12\mathrm{kN/m^2}$$

点 B の曲げ応力度は

$$\sigma=\frac{M}{W}=\frac{25}{x^2/6}=\frac{150}{x^2}\,\mathrm{kN/m^2}$$

したがって点 B の応力は

$$\sigma_B=\sigma_c+\sigma=-12+\frac{150}{x^2}$$

点 B に引張りが起こらないためには $\sigma_B=0$ となればよいから

$$-12+\frac{150}{x^2}=0$$

ゆえに　$x=3.54\mathrm{m}$

ちょっと休憩[13-1](斜面上での安定に対する考察)

1.　転倒・すべりに対する安全率

図1において,
斜面に垂直な力：$N = W\cos\theta$　(1)
斜面に垂直な力によって斜面に生ずる摩擦抵抗力：$R = \mu N = \mu \cdot W\cos\theta$　(2)
斜面に沿って滑らせようとする力：$P = W\sin\theta$　(3)
抵抗する力と滑らそうとする力が釣合っているとき，すなわち，R=P とすると，$\mu = \tan\theta$　(4)
ここに，W は物体の重さ，μ は摩擦係数（一般に土砂は0.6，岩盤は0.7）である.

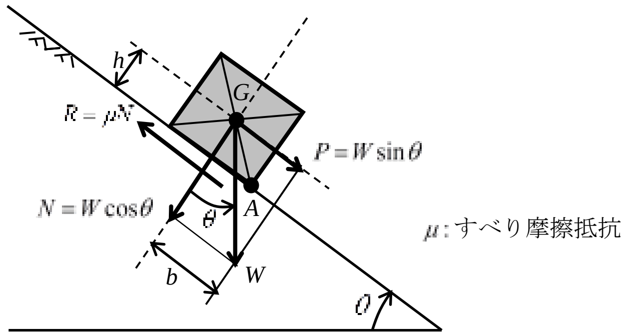


図1　滑動，転倒に対する検討

落石の初動は，滑動もしくは転倒であり，石を連結した場合の効果をこの二つについて検討する.

1.1　転倒

図5.1において，点 A においてモーメントの釣り合いを考えると

$$N \cdot b - F \cdot h > 0 \tag{5}$$

の場合，この構造物は転倒しない．したがって，この比を取ったものを**転倒に対する安全率**という.

$$F = \frac{N \cdot b}{P \cdot h} = \frac{W\cos\theta}{W\sin\theta}\frac{b}{h} \tag{6}$$

1.2　滑動

R≧F のばあいは，斜面に沿って滑り出さない．この比を取ったものを**すべりに対する安全率**という.

$$F = \frac{R}{P} = \frac{\mu \cdot W\cos\theta}{W\sin\theta} \tag{7}$$

2　滑動に関する連結効果について

図2のような，石を連結した場合の滑動に対する安全率を求めてみる.

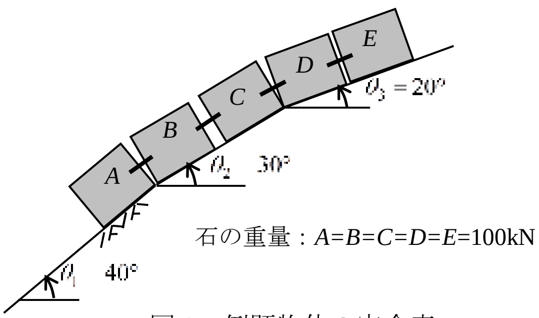


図2　例題物体の安全率

石を連結したときの安全率は,

$$F=\frac{\sum \mu \cdot W_i \cos\theta_i}{\sum W_i \sin\theta_i} \tag{8}$$

安全率は石を連結していくと次のように計算される.

1)　A :　$F=\dfrac{0.6\times 100\times \cos 40^\circ}{100\times \sin 40^\circ}=0.715$

2)　A+B :　$F=\dfrac{0.6\times 100\times(\cos 40+\cos 30)}{100\times(\sin 40+\sin 30)}=0.86$

3)　A+B+C :　$F=\dfrac{0.6\times 100\times(\cos 40+\cos 30+\cos 30)}{100\times(\sin 40+\sin 30+\sin 30)}=0.91$

4)　A+B+C+D :　$F=\dfrac{0.6\times 100\times(\cos 40+\cos 30+\cos 30+\cos 20)}{100\times(\sin 40+\sin 30+\sin 30+\sin 20)}=1.04$

5)　A+B+C+D+E :　$F=\dfrac{0.6\times 100\times(\cos 40+\cos 30+\cos 30+\cos 20+\cos 20)}{100\times(\sin 40+\sin 30+\sin 30+\sin 20+\sin 20)}=1.13$

（この第 2 項，㈱斜面対策研究所　瀬崎氏考察）

注） 実際には，全ての角度を平均して（28°となる）次のように計算してよい．上記の 5）の場合は

$$F=\frac{0.6\times 100\times \cos 28^\circ}{100\times \sin 28^\circ}=1.13$$

石はかたまって散在し，また，斜面の傾斜角もそれぞれの石について測定することは困難であるので．連結する石の総重量を推定（計算には不要ではあるが）し，その斜面の角度を求めて上の計算を行えばよい．

このように，不安定な石を他の比較的安定な石と連結することで，全体の安定化を図ることができる．

3　転倒に関する連結効果について

石を連結すると，その重心位置が安定側に移動するため，当然安全率は大きくなる．

注) 現実的には，危険と思われる石の現状の安全率を F=1.0 とし，摩擦係数 μ を逆算することが妥当と思われる．目標安全率は石の形状等不確定要素が多いことや，災害速度が速いことなどから，F=2.0 を提案する（落石対策技術マニュアル，（財）鉄道総合研究所，平成 11 年 3 月，ロックアンカーによる抑止例で F=2.0 を採用している）．

［考察］連結物体と作用する力

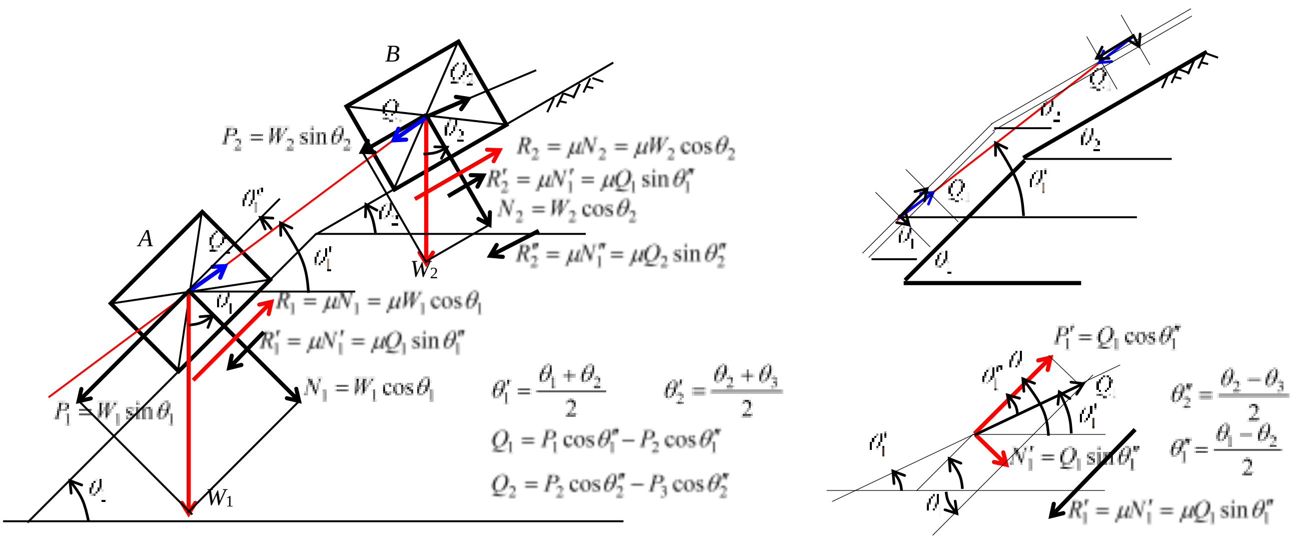


図 3　連結した石に働く力

物体 A，B の連結により，力 Q_1 による斜面方向の引張り力

$$P_1' = Q_1 \cos\theta_1''$$

および，斜面方向の力による斜面に垂直な抵抗力

$$R_1' = \mu N_1' = Q_1 \sin\theta_1''$$

が発生する．したがって，物体 A が滑り落ちようとする力は

$$P_1 - P_1' = W_1 \sin\theta_1 - Q_1 \cos\theta_1''$$

すべりに抵抗しようとする力は

$$R_1 - R_1' = \mu N_1 - \mu N_1' = \mu W_1 \cos\theta_1 - \mu Q_1 \sin\theta_1''$$

したがって，安全率は

$$F = \frac{R_1 - R_1'}{P_1 - P_1'} = \frac{\mu W_1 \cos\theta_1 - \mu Q_1 \sin\theta_1''}{W_1 \sin\theta_1 - Q_1 \cos\theta''} \tag{9}$$

となる．物体 B がない場合は Q_1 に関連する項は全て 0 となる．

物体 A，B に物体 C が連結しているときの安全率は，同様にして

$$F = \frac{(R_1 - R_1') + (R_2 - R_2')}{(P_1 - P_1') + (P_2 - P_2')} = \frac{(\mu W_1 \cos\theta_1 - \mu Q_1 \sin\theta_1'') + (\mu W_2 \cos\theta_2 - \mu Q_2 \sin\theta_2'')}{(W_1 \sin\theta_1 - Q_1 \cos\theta_1'') + (W_2 \sin\theta_2 - Q_2 \cos\theta_2'')} \tag{10}$$

一般に次式が得られる．

$$F = \frac{\sum_i \mu (W_i \cos\theta_i - Q_i \sin\theta_i'')}{\sum_i (W_i \sin\theta_i - Q_i \cos\theta_i'')} \tag{11}$$

注）式(8)は式(11)の分子，分母の第 2 項を小さいとして省略したもので，安全側に出る．