12 弾性荷重法によるはりのたわみ

12 弾性荷重法によるはりのたわみ

12.1 弾性荷重

次の 2 系統の微分方程式を比較する．

曲げを受けるはりの釣合い方程式

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2M}{dx^2} &= -q(x) \\ Q = \frac{dM}{dx} &= -\int q(x)dx + D_1 \\ M &= -\int q(x)dxdx + D_1 x + D_2 \end{aligned}\right\} \quad (12.1)$$

弾性曲線の微分方程式

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -z(x), \quad \text{ここに} \quad z(x) = \frac{M_x}{EI} \\ \theta = \frac{dy}{dx} &= -\int z(x)dx + C_1 \\ y &= -\int z(x)dxdx + C_1 x + C_2 \end{aligned}\right\} \quad (12.2)$$

式(12.1)において

荷重強度 $q(x)$ を 1 度積分すると**せん断力**を得る．もう 1 度積分すると**曲げモーメント**を得る．

式(12.2)において

荷重強度 $z(x)$ を 1 度積分すると**たわみ角**を得る．もう 1 度積分すると**たわみ**を得る．

このことより，はりの断面力を決定する境界条件と，はりの変形量を決定する境界条件を同じ形で表現できれば，荷重 $q(x)$ よりせん断力，曲げモーメントを得る過程と同じようにして，荷重 $z(x)$ からたわみ角，たわみを求めることができる．この荷重 $z(x)$ を**弾性荷重**と呼ぶ．また，境界条件を同じ形にしたはりを，実際のはりに対して**共役ばり**という．

12.2 弾性荷重法によるたわみを求める過程

(1) 実際の荷重による曲げモーメント図を求める．

(2) この曲げモーメント図に $1/EI$ を掛けたもの(弾性荷重)を共役ばりに作用させる．

(3) この共役ばりのせん断力を求めればそれが実際のはりのたわみ角になり，曲げモーメントを求めればそれがたわみとなる．

(4) 計算は $1/EI$ をいつもつれて歩くのは面倒であるから，答えのときに付ければよい．すなわち単に実際の荷重の曲げモーメント図を共役ばりに作用させて Q, M を求め，次の変換を行う．

共役ばり		実際のはり
Q	$\longrightarrow$	$\theta = \dfrac{Q}{EI}$
M	$\longrightarrow$	$y = \dfrac{M}{EI}$

ただし，はりの区間によって断面 2 次モーメントが異なる場合は，その割合で曲げモーメントを作用させる．たとえば，$2I$ の区間は弾性荷重は 1/2 の大きさとなる．

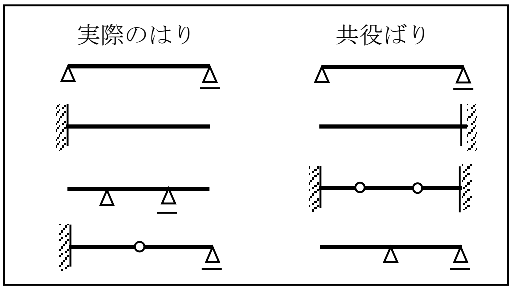

図 12.1 実際のはりと共役ばりの対応

12.3 共役ばり

次のように支点を置き換える．

固定端	$\leftrightarrow$	自由端
単純支持端	$\leftrightarrow$	単純支持端
中間単純支持点	$\leftrightarrow$	ゲルバーヒンジ

12.4　例題

［**例題 12.1**］次の単純ばりの$\theta_A,\theta_B,y_C,\theta_C$を求めよ．

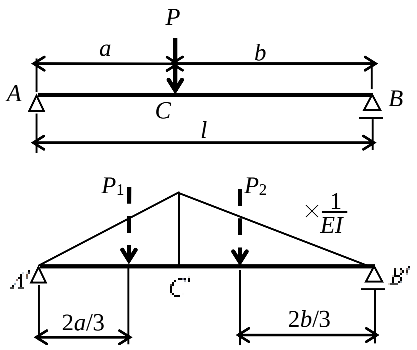

図 12.2

［解］共役ばりにおいて

$$P_1=\frac{Pa^2b}{2l},\quad P_2=\frac{Pab^2}{2l}$$

が三角形の図心位置に作用するとして，反力は

$$R'_A=\frac{1}{l}\left\{P_1\left(\frac{a}{3}+b\right)+P_2\frac{2b}{3}\right\}=\frac{Pab(l+b)}{6l}$$

$$R'_B=P_1+P_2-R'_A=\frac{Pab(l+a)}{6l}$$

ゆえに

$$\theta_A=\frac{Q_{A'}}{EI}=\frac{Pab(l+b)}{6EIl}$$

$$\theta_B=\frac{Q_{B'}}{EI}=-\frac{Pab(l+a)}{6EIl}$$

$$Q_{C'}=R_{A'}-P_1=\frac{Pab(b-a)}{3l},\quad \therefore\ \theta_C=\frac{Q_{C'}}{EI}=\frac{Pab(b-a)}{3EIl}$$

$$M_{C'}=R_{A'}a-P_1\frac{a}{3}=\frac{Pa^2b^2}{3l},\quad \therefore\ y_C=\frac{M_{C'}}{EI}=\frac{Pa^2b^2}{3EIl}$$

［**例題 12.2**］次の単純ばりの$\theta_A,\theta_B,y_{l/2}$を求めよ．

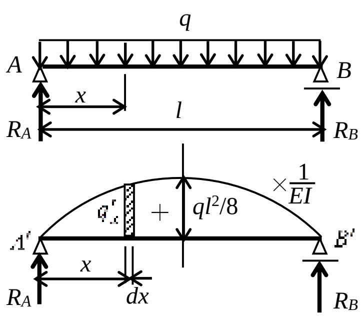

図 12.3

［解］弾性荷重の荷重強度q'_xは

$$q'_x=\frac{q}{2}(lx-x^2)$$

共役ばりの反力は

$$R_{A'}=R_{B'}=\frac{1}{2}\int_0^l q'_x dx=\frac{q}{4}\int_0^l (lx-x^2)dx=\frac{q}{4}\left[\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^l=\frac{ql^3}{24}$$

ゆえに

$$\theta_A=\frac{R_{A'}}{EI}=\frac{ql^3}{24EI}=-\theta_B$$

はりの中央点のたわみは

$$M'_{l/2}=R_{A'}\frac{l}{2}-\int_0^{l/2}q'_x dx\cdot\left(\frac{l}{2}-x\right)=\frac{ql^3}{24}\frac{l}{2}-\frac{q}{4}\int_0^{l/2}(lx-x^2)(l-2x)dx=\frac{5ql^4}{384}$$

ゆえに

$$y_{l/2}=\frac{M'_{l/2}}{EI}=\frac{5ql^4}{384EI}$$

［**例題 12.3**］次の変断面のはりのθ_A,θ_B,y_Cを求めよ．

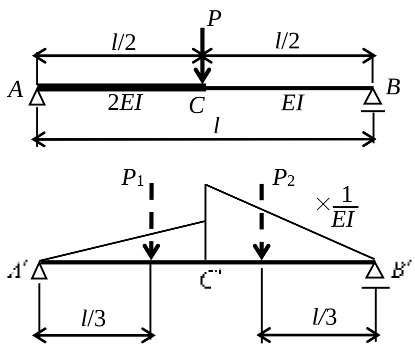

図 12.4

［解］弾性荷重はAC間をあらかじめ 1/2 倍しておく．
2 つの三角形の荷重強度は

$$P_1=\frac{Pl^2}{32},\quad P_2=\frac{Pl^2}{16}$$

反力は

$$R_{A'}=\frac{Pl^2}{24},\quad R_{B'}=\frac{5Pl^2}{96}$$

したがって点A,Bのたわみ角は

$$\theta_A=\frac{Q_{A'}}{EI}=\frac{Pl^2}{24EI},\quad \theta_{B'}=\frac{Q_{B'}}{EI}=-\frac{5Pl^2}{96EI}$$

点C'のせん断力，曲げモーメントは

$$Q_{C'}=R_{A'}-P_1=\frac{Pl^2}{96},\quad M_{C'}=R_{A'}a-P_1\frac{a}{3}=\frac{Pl^3}{64}$$

ゆえに点Cのたわみ角，たわみは

$$\theta_C=\frac{Q_{C'}}{EI}=\frac{Pl^2}{96EI},\quad y_C=\frac{M_{C'}}{EI}=\frac{Pl^3}{64EI}$$

［**例題 12.4**］次のはりのθ_B,y_Bを求めよ．また，任意点xのθ_x,y_xを求めよ．

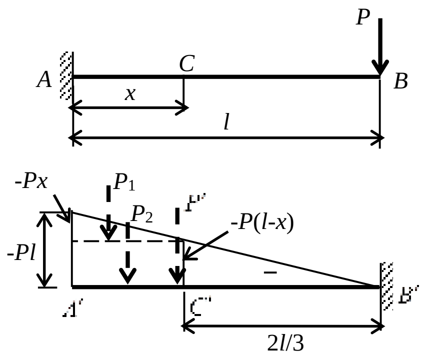

図 12.5

［解］(1)　θ_B,y_Bを求める．

弾性荷重の合力P'が三角形の重心に作用すると考える．

$$P'=-\frac{Pl^2}{2}$$

$$Q_{B'}=-R_{B'}=\frac{Pl^2}{2},\quad \therefore\ \theta_B=\frac{Q_{B'}}{EI}=\frac{Pl^2}{2EI}$$

$$M_{B'}=-P'\frac{2l}{3}=\frac{Pl^3}{3},\quad \therefore\ y_B=\frac{M_{B'}}{EI}=\frac{Pl^3}{3EI}$$

(2)　θ_x,y_xを求める．

$$P_1=-\frac{P}{2}x^2,\quad P_2=-Plx+Px^2$$

であるから点C'のせん断力，曲げモーメントは

$$Q'_x=-P_1-P_2=Plx-\frac{Px^2}{2},\quad M'_x=-P_1\cdot\frac{2x}{3}-P_2\cdot\frac{x}{2}=\frac{Pl}{2}x^2-\frac{P}{6}x^3$$

ゆえにθ_x,y_xは

$$\theta_x=\frac{Q'_x}{EI}=\frac{P}{EI}\left(lx-\frac{1}{2}x^2\right),\quad y_x=\frac{M'_x}{EI}=\frac{P}{EI}\left(\frac{l}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\right)=\frac{P}{6EI}(3l-x)x^2 \tag{a}$$

［**例題 12.5**］点 x に荷重が作用したとき，θ_C, y_C および θ_B, y_B を求めよ．

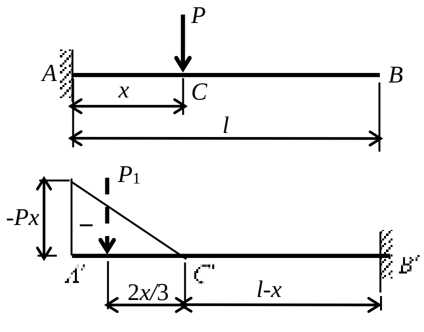

図 12.6

［解］$P_1 = -\dfrac{P}{2}x^2$

(1)　点 C のたわみ，たわみ角は

$$Q_{C'} = -P_1 = \frac{P}{2}x^2, \quad \therefore \ \theta_C = \frac{Q_{C'}}{EI} = \frac{Px^2}{2EI}$$

$$M_{C'} = -P_1\frac{2x}{3} = \frac{P}{3}x^3, \quad \therefore \ y_C = \frac{M_{C'}}{EI} = \frac{Px^3}{3EI}$$

(2)　点 B のたわみ角，たわみは

$$Q_{B'} = -P_1 = \frac{P}{2}x^2, \quad \therefore \ \theta_B = \frac{Q_{B'}}{EI} = \frac{Px^2}{2EI} = \theta_C$$

$$M_{B'} = -P_1\left\{\frac{2x}{3} + (l-x)\right\} = \frac{P}{6}(3l-x)x^2, \quad \therefore \ y_B = \frac{M_{B'}}{EI} = \frac{P}{6EI}(3l-x)x^2$$

例題 12.5 においては，点 C のたわみ角と点 B のたわみ角は，CB 間に荷重がないことから当然同じ値となる．

また，例題 12.4 式(a),および例題 12.5 式(b)に示されるように，点 B に荷重が作用したときの点 C のたわみと，点 C に荷重が作用したときの点 B のたわみは等しくなる．

［**例題 12.6**］次の張出ばりの $\theta_A, \theta_B, y_C, \theta_C$ を求めよ．

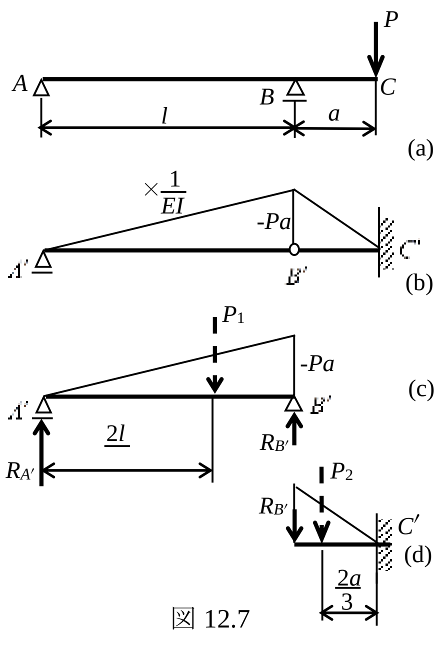

図 12.7

［解］共役ばりにおいて

$$P_1 = -\frac{Pal}{2}, \qquad P_2 = -\frac{Pa^2}{2}$$

が三角形の図心位置に作用するとして，反力は

$$R'_A = -\frac{Pal}{6}, \quad R'_B = -\frac{Pal}{3}$$

$$R'_C = R'_B + P_2 = -\frac{Pa(2l+3a)}{6}$$

ゆえに

$$\theta_A = \frac{Q'_A}{EI} = -\frac{Pal}{6EI}, \quad \theta_B = \frac{Q'_B}{EI} = \frac{Pal}{3EI}$$

$$\theta_C = \frac{Q_{C'}}{EI} = \frac{Pa(2l+3a)}{6EI},$$

$$M_{C'} = -\left(R_{B'}a - \frac{Pa^2}{2}\frac{2}{3}a\right) = \frac{Pa^2(l+a)}{3}$$

$$\therefore \ y_C = \frac{M_{C'}}{EI} = \frac{Pa^2(l+a)}{3EI}$$

12.5　問題

［**問題 12.1**］次の単純ばりのθ_A,θ_Bを求めよ.

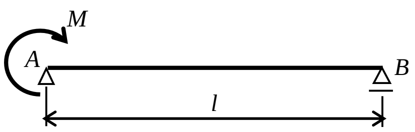

図 12.8

［**問題 12.2**］次の単純ばりのθ_A,θ_Bを求めよ.

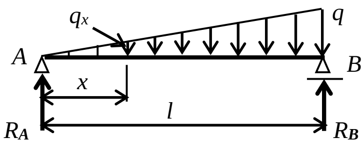

図 12.9

［**問題 12.3**］次の単純ばりの$\theta_A,\theta_B,y_C,\theta_C$を求めよ.

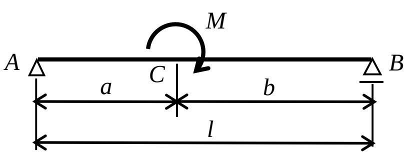

図 12.10

［**問題 12.4**］次の片持ばりのθ_B,y_Bを求めよ.

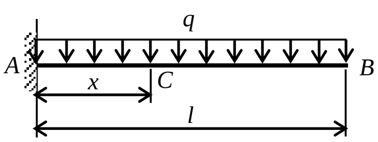

図 12.11

［**問題 12.5**］次の片持ばりのθ_B,y_Bを求めよ.

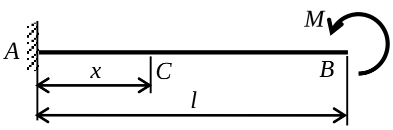

図 12.12

［**問題 12.6**］次の変断面のはりの θ_B, y_B を求めよ.

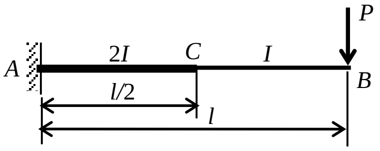

図 12.13

［**問題 12.7**］次の張出ばりの $\theta_A,\theta_B,\theta_C,y_G,{}_l\theta_G,{}_r\theta_G$ を求めよ.

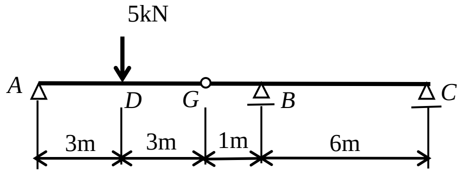

図 12.14