

(051027-060120)

# 第 6 章

## 単純支持の矩形板を解く Navier の方法

## 目 次

第 6 章 単純支持の矩形板を解く Navier の方法	
6.1 概説	1
6.2 正弦型の分布荷重を受ける単純支持の矩形板 I	1
6.3 正弦型の分布荷重を受ける単純支持の矩形板 II	5
6.4 任意の分布荷重をうける単純支持の矩形板	6
6.5 例題	9
[例題 1] 満載等分布荷重をうける 4 辺単純支持の矩形板	9
[例題 2] 中心部に矩形型の等分布荷重が作用する 4 辺単純支持の矩形板	13
[例題 3] 中心に集中荷重が作用する 4 辺単純支持の矩形板	14
[例題 4] 偏心集中荷重が作用する 4 辺単純支持の矩形板	15
6.6 仮想仕事の原理による Navier 解の誘導	16
6.7 エネルギー最小の理論による Navier 解の誘導	18



## 第6章 単純支持の矩形板を解く Navier の方法

### 6.1. 概説

矩形板の曲げを解析するための最も古典的な方法は、Navier による二重 Fourier 級数を用いる方法である。この方法は解析は簡単であるが、解が二重級数であるため、その数値計算が困難となる。なぜなら、モーメントがたわみの2階微分で与えられ、せん断力は3階の微分で与えられることになり、級数の収束は微分の階数が増えるに従って収束が悪くなるからである。

### 6.2 正弦型の分布荷重を受ける単純支持の矩形板 I

図 6.1 に示す矩形平板の全面に次の正弦形の荷重

$$p = p_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (6.1)$$

が分布している場合を考える。ここに、 $p_0$  は板の中心における荷重強度を表す。さらに一般的な場合は、この問題の解から取扱うことが出来る。

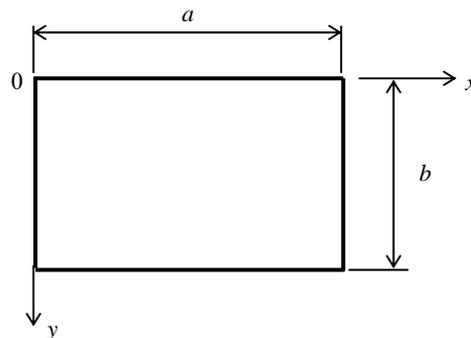


図 6.1 矩形平板の座標

式(6.1)の荷重分布に対するたわみの微分方程式は式(2.34)から

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_0}{D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (6.2)$$

で与えられる。4辺が単純支持の矩形版に対して、境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \text{ および } x=a \text{ のとき : } w=0, \quad M_x=0 \\ y=0 \text{ および } y=b \text{ のとき : } w=0, \quad M_y=0 \end{array} \right\}$$

で与えられるが、これらの条件は次のもので置き換えることができる。すなわち

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \text{ および } x=a \text{ のとき : } w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ y=0 \text{ および } y=b \text{ のとき : } w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right\} \quad (6.3)$$

この置き換えの理由は次のようである．たとえば， $x$ 軸に垂直な縁では，式(2.23)から

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (6.4)$$

しかるにこの縁に沿っては，常に  $w=0$  である．すなわち， $y$  がどのように変わっても常に  $w=0$  であって， $w$  は  $y$  の関数ではない．したがって， $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ ， $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ ， $\dots$  である．このことと式(6.4)とから式(6.3)のような置き換えが得られる．

微分方程式(6.2)の解は

$$w = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (6.5)$$

の形を取るにより境界条件を満足することがわかる．式(6.5)を式(6.2)に代入して計算すると未知計数  $A$  が求められ，式(6.5)のたわみは最終的に次のように得られる．

$$w = \frac{p_0}{\pi^4 D \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (6.6)$$

式(6.6)は微分方程式(6.2)と，境界条件(6.3)を満足しているから，確かに今の場合の解である．式(6.6)から曲げモーメントおよびねじりモーメントを求めれば，式(2.18),(2.19)により

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{p_0}{\pi^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{p_0}{\pi^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left( \frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ T_x = -T_y &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{p_0(1-\nu)}{\pi^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \frac{1}{ab} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

たわみ  $w$  および曲げモーメント  $M_x, M_y$  の最大値は，明らかに板の中心  $x=a/2, y=b/2$  で起こり，その値はそれぞれ

$$w_{\max} = \frac{p_0}{\pi^4 D \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \quad (6.8)$$

$$(M_x)_{\max} = \frac{p_0}{\pi^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right), \quad (M_y)_{\max} = \frac{p_0}{\pi^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left( \frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \quad (6.9)$$

特に正方形板のときは，式(6.8),(6.9)において  $a=b$  として次の値が得られる．

$$w_{\max} = \frac{p_0 a^4}{4\pi^2 D}, \quad (M_x)_{\max} = (M_y)_{\max} = \frac{(1+\nu)p_0 a^2}{4\pi^2} \quad (6.10)$$

同じような問題が、はりの場合には (図 6.2)

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p_0}{EI} \sin \frac{\pi x}{a}, \quad M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

から、最大曲げモーメントは

$$M_{\max} = \frac{p_0 a^2}{\pi^2}$$

であり、平板のときの式(6.10)の値は約 30%位に減少する。

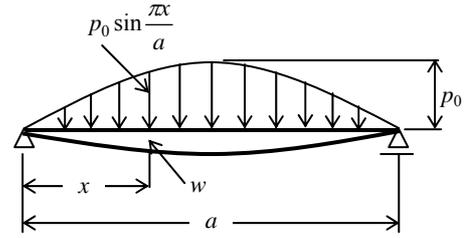


図 6.2 単純ばりに正弦型の分布荷重が作用したとき

せん断力は式(2.18),(2.19)により

$$\left. \begin{aligned} S_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w = -\frac{p_0}{\pi a \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ S_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w = -\frac{p_0}{\pi b \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

平板の周辺における反力は、 $x=a$  の辺 (図 6.1) では式(2.44)から

$$V_x = \left( -S_x + \frac{\partial T_x}{\partial y} \right)_{x=a} = \frac{p_0}{\pi a \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{2-\nu}{b^2} \right) \sin \frac{\pi y}{b} \quad (6.12)$$

となる。ここに反力  $V_x$  は、はりの場合の約束と同じように、下から上に向かうものを正の向きにとる。

この反力の  $x=a$  の辺に沿う分布は  $\sin \frac{\pi y}{b}$  による正弦分布である(図 6.3)。  $x=0$  の辺に沿う反力は式 (6.12)

の符号を逆にした値になって、 $x=a/2$  の軸に対して対称分布となる。

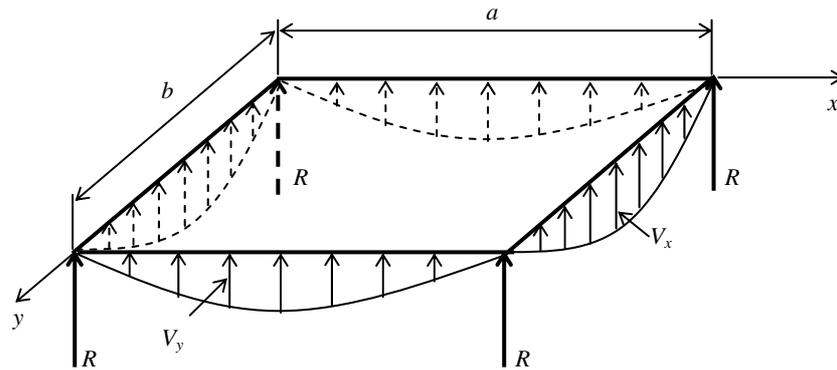


図 6.3 板の周辺の反力 (式(6.12),(6.13),(6.16))

同様に、 $y=b$  の辺における反力  $V_y$  は

$$V_y = \left( -S_y + \frac{\partial T_y}{\partial x} \right)_{y=b} = \frac{p_0}{\pi b \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{a^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \quad (6.13)$$

式(6.13)は式(6.12)の文字  $a, b$  を入れかえた式形である。

ここに、注意すべきことは、板の反力としては、式(6.12)、(6.13)の分布反力のほかに、4つの隅に集中反力  $R$  (図 6.3) が存在することである。今の問題では4つの隅の反力是对称ということからすべて相等しい値でなければならない。まず、分布反力  $V_x, V_y$  の4辺に沿った全合力  $P$  を求めるため積分して

$$\begin{aligned} P &= 2\int_0^b V_x dy + 2\int_0^a V_y dx \\ &= \frac{4p_0 ab}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left[ \frac{1}{a^2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{2-\nu}{b^2} \right) + \frac{1}{b^2} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{a^2} \right) \right] \\ &= \frac{4p_0 ab}{\pi^2} + \frac{8p_0(1-\nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \end{aligned} \quad (6.14)$$

を得る。一方、式(6.1)の分布荷重の板の全面積にわたる合力  $Q$  は

$$Q = \int_0^b \int_0^a p_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{4p_0 ab}{\pi^2} \quad (6.15)$$

となる。このように  $P$  と  $Q$  が等しくないのは4隅に集中反力  $R$  が存在するためであって、

$$P + 4R = Q$$

でなければならない。これから集中反力  $R$  を求めると次のようになる。

$$R = -\frac{2p_0(1-\nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \quad (6.16)$$

右辺の負号は、この集中反力が下向きであることを示す。

このことの力学的背景は、もし、集中反力  $R$  がなければ式(6.1)の外力によって、板の4隅付近は浮き上がることになる。これを押さえて4辺がもとの直線状のままを保たせるために、負の集中反力  $R$  が作用しなければならないということである。集中反力が存在するという解の性質を利用して、隅だけで板を支える問題を取扱うことが出来る。

曲げによる縁応力の最大は、やはり板の中心の上下の表面で生じ、 $a > b$  のときは、式(6.9)から

$$(M_y)_{\max} > (M_x)_{\max} \quad (6.17)$$

となる。

その理由は、式(6.9)の2式の因数を比べて、 $a > b$  のとき

$$\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}, \quad \text{または} \quad \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\nu < \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}$$

となるからである。式(6.17)の大小関係は一見逆のように感ぜられるが、これは  $a$  が大きくなると、それにつれて式(6.1)の分布が  $x$  軸の方向になだらかになるからである。

式(6.9)によって縁応力の最大値は

$$(\sigma_y)_{\max} = \frac{6}{h^2} (M_y)_{\max} = \frac{6p_0}{\pi^2 h^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \quad (6.18)$$

特に  $a=b$  の正方形のときは

$$(\sigma_y)_{\max} = (\sigma_x)_{\max} = \frac{3(1+\nu)p_0 a^2}{2\pi^2 h^2}, \quad (a=b) \quad (6.19)$$

最後に、せん断応力の最大値を計算する。式(6.12)と式(6.13)とを見比べて、それぞれ辺の中点  $y=b/2, x=a/2$  における値は

$$(V_x)_{\max} = \frac{p_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2-\nu}{b^2}\right), \quad (V_y)_{\max} = \frac{p_0}{\pi b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{a^2}\right) \quad (6.20)$$

であって、 $a>b$  のときは

$$\frac{1}{b} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{a^2}\right) > \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2-\nu}{b^2}\right) \quad (6.21)$$

であるから、

$$(V_y)_{\max} > (V_x)_{\max}, \quad (a>b) \quad (6.22)$$

式(6.21)の不等式の証明は、左変から右辺を引いた式を変形して、 $a>b$  のとき

$$\frac{1}{b} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{a^2}\right) - \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2-\nu}{b^2}\right) = \frac{a-b}{a^3 b^3} \{a(a-b) + \nu ab + b^2\} > 0$$

となるからである。

### 6.3 正弦型の分布荷重を受ける単純支持の矩形板Ⅱ

平板に作用する荷重分布が式(6.1)の代わりに

$$p = p_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.23)$$

の場合を考えよう。ここに、 $m, n$  はいずれも正の整数とする。

関数

$$f(x) = \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

の様子は、 $m=1, 2, 3, \dots$  に応じて図 6.4 のようである。

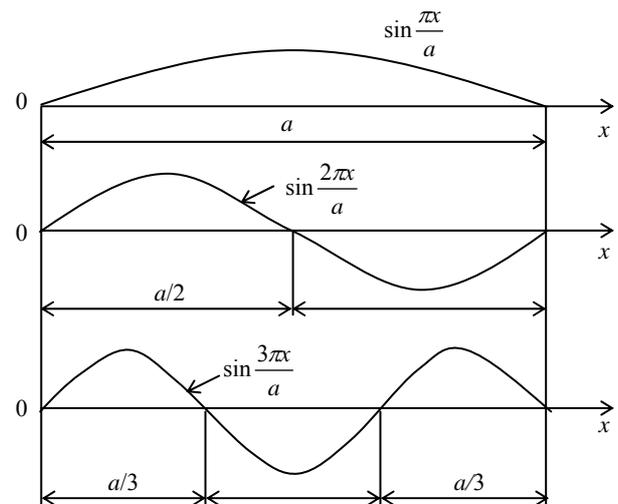


図 6.4  $f(x) = \sin \frac{m\pi x}{a}$

式(6.23)の分布荷重のときは、たわみの微分方程式は

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_0}{D} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.24}$$

と書かれ、その解は式(6.5)から式(6.6)を得たのと同じようにして

$$w = \frac{p_0}{\pi^4 D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.25}$$

そして式(6.6)以下のモーメント、せん断力等を得る過程から明らかなように、式(6.25)から導かれるこれらの諸量を得るには、前の諸式における  $1/a, 1/b$  の代わりにそれぞれ  $m/a, n/b$  で置きかえさえすればよいことが分かる。

$m, n$  のいろいろな値に対する式(6.25)の解を組み合わせると工学上有用な問題の解を導くことができる。

### 6.4 任意の分布荷重をうける単純支持の矩形板

上に導いたことを利用して、4辺が単純支持の矩形板に任意の分布荷重

$$p = f(x, y) \tag{6.26}$$

が作用するときの一般解を導く。函数  $f(x, y)$  は  $0 < x < a, 0 < y < b$  の領域だけで与えられる関数である。

関数  $f(x, y)$  は矩形領域の内部で

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.27}$$

なる二重の正弦級数であらわすことができる。ここに、 $A_{mn}$  はパラメータ  $m, n$  を含む定数である。式(6.27)の右辺は  $2a$  および  $2b$  を周期とする関数であるが、ここで問題の  $x=a$  および  $x=b$  ごとには、図 6.5 に示すような周期性をもつ。

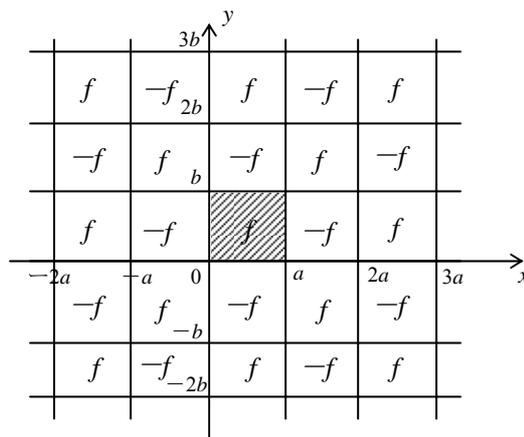


図 6.5 式(6.27)の右辺の周期性  $f=f(x,y)$

与えられた  $f(x,y)$  に対する式(6.27)の係数  $A_{mn}$  を求める. そのためにはまず次の定積分

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} dx = 0, & (m \neq m') \\ I_2 &= \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} dx = \frac{a}{2}, & (m = m') \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

に注目する. 式(6.28)の証明は次のようである. まず,  $m \neq m'$  のときは

$$\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} = \frac{1}{2} \left[ \cos(m-m') \frac{\pi x}{a} - \cos(m+m') \frac{\pi x}{a} \right]$$

であるから, 上の第1の積分  $I_1$  は

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{(m-m')\pi} \sin \frac{(m-m')\pi x}{a} - \frac{a}{(m+m')\pi} \sin \frac{(m+m')\pi x}{a} \right]_0^a = 0$$

つぎに,  $m = m'$  のときは

$$\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} = \sin^2 \frac{m\pi x}{a} = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2m\pi x}{a} \right)$$

であるから, 式(6.28)の第2の積分  $I_2$  は

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^a \left( 1 - \cos \frac{2m\pi x}{a} \right) dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{a}{2m\pi} \sin \frac{2m\pi x}{a} \right]_0^a = \frac{a}{2}$$

式(6.27)の両辺にある特定の  $m'$  による  $\sin \frac{m'\pi x}{a} dx$  を乗じて, 0 から  $a$  まで積分すれば, 式(6.28)によって

$$\int_0^a f(x,y) \sin \frac{m'\pi x}{a} dx = \frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m'n} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

さらに, この式の両辺に  $\sin \frac{n'\pi y}{b} dy$  を乗じて, 0 から  $b$  まで積分すれば

$$\int_0^b \int_0^a f(x,y) \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4} A_{m'n'}$$

以上により, 関数  $f(x,y)$  が与えられたとき,  $0 < x < a$  および  $0 < y < b$  の範囲で  $f(x,y)$  に一致すべき式(6.27)の右辺の正弦級数の中の係数  $A_{mn}$  は次のように求められる.

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (6.29)$$

式(6.27)の右辺が, 与えられた関数  $f(x,y)$  の Fourier 級数表示であつて, 式(6.29)がその Fourier 係数である.

式(6.23),(6.25)の  $p_0$  を,  $m$  および  $n$  の値に応じて異なる定数と考え,これを  $A_{mn}$  で表わして,  $m, n$  についての和をとれば, 式(6.23)の  $p$  は式(6.27)となり, これに応じて, 式(6.25)のたわみの解は次のように得られる.

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin a \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6.30)$$

式(6.30)が4辺の単純支持せられた矩形平板(第6.1図)に任意荷重分布が作用したときの一般解であつて, 1820年に Navier が与えたものである

式(6.30)のたわみによって、曲げモーメント、ねじりモーメントを求めれば、式(2.18),(2.19)により

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ M_y &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ T_x = -T_y &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-\nu)A_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \frac{mn}{ab} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

またせん断力は

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \frac{1}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mA_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ S_y &= \frac{1}{\pi b} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{nA_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

平板の周辺における反力は、 $x=0$ または $x=a$ の辺、および $y=0$ または $y=b$ の辺について、それぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{1}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{(2-\nu)n^2}{b^2}\right) \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ V_y &= \frac{1}{\pi b} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \left(\frac{(2-\nu)m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \sin \frac{m\pi x}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

具体的な例題について、式(6.30)の級数を計算するのは、一般にはそれほど級数の収束は悪くはない。しかし、これを2回微分して求めたモーメントの式(6.31)は、2回微分のために $m, n$ の2次項が出るので、それだけ収束が悪くなる。せん断力、反力の式(6.32),(6.33)はたわみ $w$ を3回微分するから、もっと収束が悪くなる。

## 6.5 例題

## [例題 1] 満載等分布荷重をうける 4 辺単純支持の矩形板

4 辺が単純支持された矩形板に一樣な荷重  $p_0$  を満載した場合のたわみを求めよ。

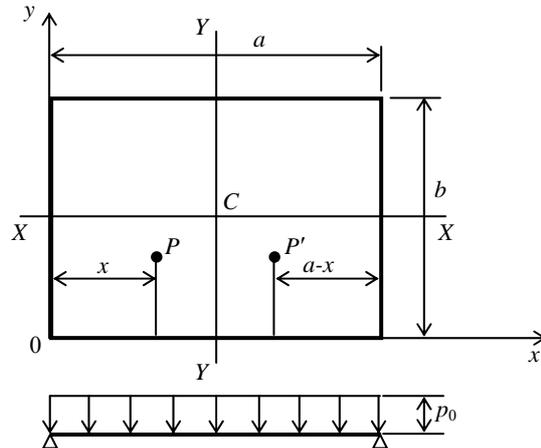


図 6.6 等分布荷重をうける 4 辺単純支持の矩形版

[解] 式(6.26)における荷重強度は単に

$$p = f(x, y) = p_0 \quad (p_0 = \text{定数}) \quad (6.34)$$

である。式(6.29)の Fourier 係数は

$$A_{mn} = \frac{4p_0}{ab} \int \int \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{4p_0}{\pi^2 mn} (\cos m\pi - 1)(\cos n\pi - 1)$$

この値は  $m, n$  のどちらか一方、または両方が  $2, 4, 6, \dots$  の偶数値をとるときは  $0$  になり、 $m, n$  の両方が  $1, 3, 5, \dots$  の奇数値をとるときだけ  $0$  にならない。したがって

$$A_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \quad (6.35)$$

この値を式(6.30)に代入して、所要のたわみ  $w$  は次のように得られる。

$$w = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum \sum \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \quad (6.36)$$

モーメント、せん断力、周辺反力は一般式(6.31),(6.32),(6.33) に式(6.35)の Fourier 係数の値を代入することによって、直ちに解析解を求めることができる。このように他の荷重分布が与えられた問題でも、式(6.35)に相当する Fourier 級数を求めさえすれば解析解が直ちに与えられる。

[問] 次のことを考えてみよ.

- (1) 偶数値が消える意味を考えよ.
- (2) 式(6.36)の最大値を求めよ. また  $a=b$  のとき,  $w=0.004062(p_0 a^4/D)$  となることを示せ. また, 式(6.36)の級数の第2項以下を無視した場合, 誤差はいかほどになるか.
- (3) 式(6.36)のたわみによる曲げモーメント  $M_x$  の最大値を求めよ. また  $a=b$  の正方形板について計算せよ.
- (4) 大きさ相似な2つの平板の厚さをどちらも同じにとると, 中心における最大たわみは2つの平板の大きさの比  $r$  (対応する2つの辺の長さの比) の4乗に比例することを示せ.

[解]

(1) 式(6.36)は  $m, n$  の偶数値が消えていて, 6次式が分母にまわっているから, 相当に収束がよい. 偶数値が消えていることは, 分布荷重が板の中心  $C$  を通る2軸 (図 6.6 の  $XX, YY$ ) について対象であるべきことから当然である. というのは, 図 6.6 において,  $YY$  軸に関する点  $P$  の対象の点を  $P'$  とすれば, これらの2つの点におけるたわみは等しくなければならない. しかるに,  $P'$  については

$$\begin{aligned} \sin \frac{m\pi}{a}(a-x) &= \sin\left(m\pi - \frac{m\pi x}{a}\right) = \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m=1,3,5,\dots) \\ &= -\sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m=2,4,6,\dots) \end{aligned}$$

となるからである. 一般に, 与えられた荷重分布が  $XX, YY$  について対称でさえあれば,  $m, n$  の偶数値は常に消えることが分かる.

- (2) 式(6.36)のたわみの最大は, 平板の中心  $x=a/2, y=b/2$  で起こり, その値は

$$(w)_{max} = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

この式は次の表 6.1 を参照して式(6.37)の形にまとめられる.

表 6.1  $\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$  の値 式(6.37)

m	n	$\sin \frac{m\pi}{2}$	$\sin \frac{n\pi}{2}$	$\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$	$\frac{m+n}{2} - 1$
1	1	1	1	1	0
1	3	1	-1	-1	1
3	1	-1	1	-1	1
1	5	1	1	1	2
3	3	-1	-1	1	2
5	1	1	1	1	2
1	7	1	-1	-1	3
3	5	-1	1	-1	3
5	3	1	-1	-1	3
7	1	-1	1	-1	3
...	...	...	...	...	...

$$(w)_{mzx} = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (6.37)$$

特に正方形板のときは、 $a=b$  とおいて、

$$\begin{aligned} (w)_{mzx} &= \frac{16p_0 a^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn(m^2 + n^2)^2} \\ &= \frac{16p_0 a^4}{\pi^6 D} \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{150} + \left( \frac{1}{1690} + \frac{1}{2916} \right) - \left( \frac{1}{8750} + \frac{1}{8670} \right) + \dots \right\} \\ &= (0.004161 - 0.000111 + 0.000016 - 0.000004 + \dots) \frac{p_0 a^4}{D} \\ &= 0.004062 \frac{p_0 a^4}{D} \end{aligned} \quad (6.38)$$

式(6.39)の値は、別な方法で求めた式(7.33)と同じ値である。

式(6.39)の級数の第2項以下を無視した近似式

$$(w_{\max})_{\text{approx}} = \frac{4p_0 a^4}{\pi^6 D} = 0.004161 \frac{p_0 a^4}{D} \quad (6.40)$$

は、正しい値式(6.39)に比べて、+2.4%の誤差をもつにすぎない。

(3) 式(6.36)のたわみによる曲げモーメント  $M_x$  の最大は、式(6.35)の  $A_{mn}$  の値を式(6.31)の第1式に代入して、 $x=a/2$ ,  $y=b/2$  とおき

$$(M_x)_{\max} = \frac{16p_0}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{\nu n^2}{b^2} \right) \quad (6.41)$$

特に正方形板のときは、 $a=b$  とおいて

$$(M_x)_{\max} = \frac{16p_0 a^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn(m^2 + n^2)^2} (m^2 + \nu n^2) \quad (6.42)$$

式(6.42)の数値計算を示せば<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} (M_x)_{\max} &= \frac{16(1+\nu)p_0 a^2}{\pi^4} (0.2500 - 0.0333 + 0.0108 - 0.0048 + 0.0026 - 0.0015 + 0.0010) \\ &= 0.03692(1+\nu)p_0 a^2 \end{aligned} \quad (6.43)$$

$\nu = 0.3$  とすれば

---

1) この級数の、たとえば第6項の数値計算は

$$(1+\nu) \left\{ \frac{1}{1 \cdot 11(1^2 + 11^2)} + \frac{1}{3 \cdot 9(3^2 + 9^2)} + \frac{1}{5 \cdot 7(5^2 + 7^2)} \right\} = (1+\nu) \times 0.0015$$

$$(M_x)_{\max} = 0.0480 p_0 a^2 = 0.384 \frac{p_0 a^2}{8} \quad (6.44)$$

この式(6.44)の値は別な方法で計算した式(7.39)の値と同じである。式(6.43)の級数は分母が  $m, n$  の4次式で収束するから、式(6.39)のたわみのときよりも収束が劣る。

(4) 図 6.7 のように、大きさの相似な2つの平板をとると、厚さをどちらも同じとすれば、中心における最大たわみは、2つの平板の大きさの比  $r$  (対応する2つの辺の長さの比) の4乗に比例する。たとえば辺の長さが2倍になると最大たわみは16倍になる。すなわち (図 6.7)

$$W_{\max} = r^4 w_{\max} \quad (6.45)$$

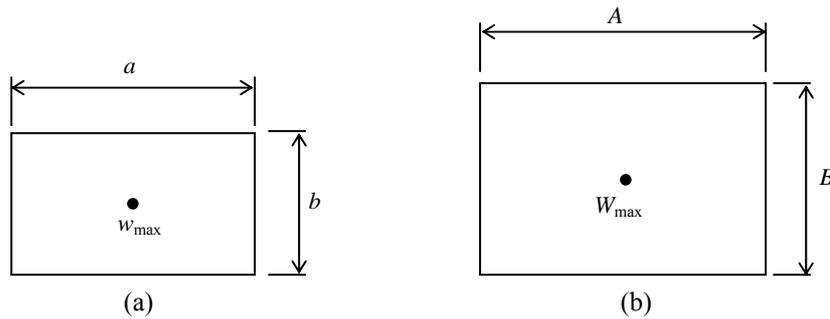


図 6.7 相似の平板

このことを知るには、式(6.37)の因数：

$$c = \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad \text{と} \quad C = \frac{1}{\left(\frac{m^2}{A^2} + \frac{n^2}{B^2}\right)^2}$$

とを比べればよい。すなわち

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B} = k, \quad A=ra, \quad B=rb$$

とおけば

$$C = \frac{B^4}{\left\{\frac{m^2}{(A/B)^2} + n^2\right\}^2} = \frac{r^4 b^4}{\left(\frac{m^2}{k^2} + n^2\right)^2} = \frac{r^4 b^4}{\left(\frac{m^2}{(a/b)^2} + n^2\right)^2} = r^4 c$$

ゆえに式(6.45)が得られる。

曲げモーメントの最大値については、式(6.41)から分かるように、相似の線比  $r(=A/a)$  の平方に比例して増す。ここで図 6.7(a)の全荷重  $P$  は  $P=p_0 ab$  で、図 6.7(b)の全荷重  $P$  は  $P=p_0 AB=r^2 p_0 ab=r^2 P$  である。したがって最大曲げモーメントが板の大きさにつれて  $r^2$  に比例して増すのは、荷重が  $r^2$  倍になるからに因るのであって、もし板が大きくなっても、全荷重  $P$  さえ一定ならば、最大曲げモーメント、したがって最大緑応力の値は変わらないことが結論できる。ただしこのときでも、最大たわみは  $r^2$  に比例して増す。

[例題 2] 中心部に矩形型の等分布荷重が作用する 4 辺単純支持の矩形板

中心部の矩形領域  $\alpha\beta$  に一様な荷重  $p_0$  が作用する場合のたわみを求めよ.

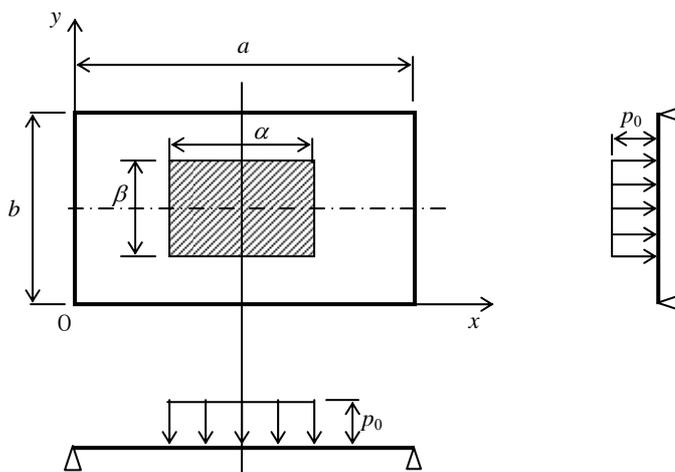


図 6.8 中心部の矩形領域に載荷せられた平板

[解] この場合には、荷重関数  $p = f(x, y)$  は次のものである.

$$p = f(x, y) = p_0, \quad \left( \frac{a-\alpha}{2} < x < \frac{a+\alpha}{2}, \frac{b-\beta}{2} < y < \frac{b+\beta}{2} \right) \quad (6.46)$$

平板のそのほかの部分では  $p=0$  である.

式(6.29)によって式(6.46)の Fourier 係数を計算するのに、まず  $x$  についての定積分の部分は、3 部分に分けて

$$\int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \int_0^{\frac{a-\alpha}{2}} dx + \int_{\frac{a-\alpha}{2}}^{\frac{a+\alpha}{2}} dx + \int_{\frac{a+\alpha}{2}}^a dx$$

左辺の第 2 項だけが  $f(x, y) = p_0$  の定数で、第 1 項、第 3 項の荷重関数は 0 であることに注目して、今の問題の Fourier 係数は

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_{\frac{b-\beta}{2}}^{\frac{b+\beta}{2}} \int_{\frac{a-\alpha}{2}}^{\frac{a+\alpha}{2}} p_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ &= \frac{16p_0}{mn\pi^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{m\pi\alpha}{2a} \sin \frac{n\pi\beta}{2b} \\ &= \frac{16p_0}{\pi^2} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn} \sin \frac{m\pi\alpha}{2a} \sin \frac{n\pi\beta}{2b}, \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \quad (6.47)$$

ここに、前の例題における表 6.1 により

$$\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{m+n}{2}-1} \quad (6.48)$$

であり、 $m, n$  の偶数値は不要である.

式(6.47)の Fourier 係数の値を、たわみの一般式(6.30)に代入して所要のたわみ  $w$  は

$$w = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi\alpha}{2a} \sin \frac{n\pi\beta}{2b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6.49)$$

この解の局部荷重が板全体に拡がって、 $\alpha = a$ ,  $\beta = b$  (図 6.8) となったときは、式(6.48)を参照して、式(6.49)は前の問題のたわみの式(6.36)に帰することがみられる。

正方形板 ( $a=b$ ) を例にとり、荷重面積を  $\alpha = a/2$ ,  $\beta = b/2$  とすれば、板の中心における最大たわみは式(6.49)から

$$\begin{aligned} w_{\max} &= \frac{16p_0 a^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{mn(m^2 + n^2)^2} \sin \frac{m\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{4} \\ &= \frac{16p_0 a^4}{\pi^6 D} (0.1250 - 0.0033 - 0.0001 + \dots) = 0.0020024 \frac{p_0 a^4}{D} \end{aligned} \quad (6.50)$$

このたわみの値は、前面に満載した値(6.39)に比べて、およそ半分である。荷重の総量は 1/4 なのに、たわみが 1/2 にも達するのは、中心部に集まっていることによる。

### [例題 3] 中心に集中荷重が作用する 4 辺単純支持の矩形板

4 辺が単純支持の矩形平板の中心に集中荷重  $P$  が作用するときのたわみを求めよ。

[解] これは、式(6.49)の解から得ることが出来る。それには  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$  として、集中荷重  $P$  を

$$P = p_0 \alpha \beta \quad (6.51)$$

で表現すればよい。 $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$  のときは Taylor 展開の初項だけをとって

$$\sin \frac{m\pi\alpha}{2a} = \frac{m\pi\alpha}{2a} - \frac{1}{3!} \left( \frac{m\pi\alpha}{2a} \right)^3 + \dots = \frac{m\pi\alpha}{2a}, \quad \sin \frac{n\pi\beta}{2b} = \frac{n\pi\beta}{2b}$$

であるから、これらを式(6.49)に代入して、式(6.51)の  $P$  でおきかえ

$$w = \frac{4P}{ab\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6.52)$$

正方形板 ( $a=b$ ) のときの、中心 ( $x=a/2, y=b/2$ ) のたわみは

$$\begin{aligned} w_{\max} &= \frac{4Pa^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} \\ &= \frac{4Pa^2}{\pi^4 D} (0.2500 + 0.0200 + 0.0060 + 0.0025 + 0.0013 + \dots) = 0.0115 \frac{Pa^2}{D} \end{aligned} \quad (6.53)$$

式(6.53)の計算における級数の収束は左程よくない。別の計算による正しい値は  $0.01160Pa^2/D$  である。さらに曲げモーメントになると、 $m, n$  の 2 次式でしか収束しないから、数値計算は相当困難である。この問題については、もっと収束のよい別な解がある (後述)。

[例題 4] 偏心集中荷重が作用する 4 辺単純支持の矩形板

図のように、点  $A(\xi, \eta)$  に集中荷重  $P$  が作用する 4 辺単純支持の矩形板を考える。

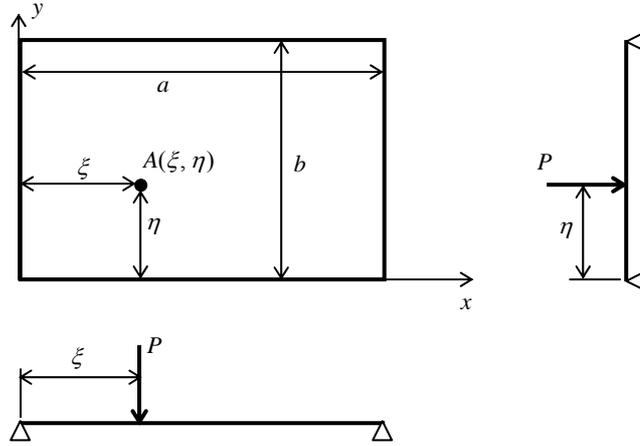


図 6.9 偏心集中荷重  $P$  の作用する矩形版

[解] この集中荷重  $P$  は次の性質をもつ関数  $f(x, y)$  である。

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (0 < x < \xi) \\ p & (\xi < x < \xi + d\xi) \\ 0 & (\xi + d\xi < x < a) \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (0 < y < \eta) \\ p & (\eta < y < \eta + d\eta) \\ 0 & (\eta + d\eta < y < b) \end{cases}$$

すなわち、点  $A(\xi, \eta)$  のまわりの  $d\xi d\eta$  なる微小な矩形領域に  $p$  なる一定の分布荷重が存在していて、 $P = pd\xi d\eta$  である。上の性質をもつ  $f(x, y)$  を式(6.29)に代入して<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_{\eta}^{\eta+d\eta} \int_{\xi}^{\xi+d\xi} f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ &= \frac{4p}{ab} \int_{\xi}^{\xi+d\xi} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_{\eta}^{\eta+d\eta} \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\ &= \frac{4p}{ab} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b} \end{aligned}$$

この係数  $A_{mn}$  を式(6.30)に代入すると、たわみは次式で与えられる。

$$w = \frac{4P}{ab\pi^4 D} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6.54)$$

この解において、とくに  $\xi = a/2$ ,  $\eta = b/2$  とおけば表 6.1 により

$$\sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b} = \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{m+n}{2}-1}$$

となり、式(6.52)と一致する。

$$1) \int_{\xi}^{\xi+d\xi} \sin \frac{m\pi x}{a} dx = -\frac{a}{m\pi} \left[ \cos \frac{m\pi x}{a} \right]_{\xi}^{\xi+d\xi} = -\frac{a}{m\pi} \left\{ \cos \frac{m\pi(\xi+d\xi)}{a} - \cos \frac{m\pi \xi}{a} \right\} = \frac{a}{m\pi} \frac{d}{d\xi} \cos \frac{m\pi \xi}{a} d\xi = \sin \frac{m\pi \xi}{a} d\xi$$

## 6.6 仮想仕事の原理による Navier 解の誘導

4 辺が単純支持の矩形平板 (図 6.1) の一般解(6.30)は, 仮想仕事の原理を使っても求めることができる. 次にこのことを調べよう.

板の全ひずみエネルギー  $W$  は, 式(5.4)により

$$W = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \quad (6.55)$$

前の考察から, 単純指示の平板では, 座標を図 6.1 のように取れば, 任意の荷重分布に対するたわみ  $w$  が, 二重正弦級数:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6.56)$$

の形で与えられる. 式(6.55)の  $w$  に式(6.56)を代入したとき, エネルギー  $W$  が様々な値をとるのは,  $A_{mn}$  の変化による. よって, 仮想仕事の原理を使って与えられた荷重状態に応じたの値を定めることができる.

まず式(6.56)を式(6.55)に代入して, 定積分を実行する. 代入して

$$\begin{aligned} W = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a & \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\} \\ & - 2(1-\nu) \left\{ \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \right\} \\ & - \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \frac{mn\pi^2}{ab} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right)^2 \Bigg\} dx dy \quad (6.57) \end{aligned}$$

この積分を行うに当たって,

$$m = m' \text{ または } m \neq m' \text{ に応じて } \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi y}{b} dx = \frac{a}{2} \text{ または } 0,$$

$$n = n' \text{ または } n \neq n' \text{ に応じて } \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = \frac{b}{2} \text{ または } 0,$$

$$\text{および } \int_0^b \int_0^a \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy = \int_0^b \int_0^a \cos^2 \frac{m\pi x}{a} \cos^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4}$$

に注目すれば, 式(6.57)の中の  $2(1-\nu)\{ \}$  の項は消えて, 式(6.57)は次のようになる:

$$W = \frac{\pi^4 ab D}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (6.58)$$

さて, 平板の任意の一点  $x = \xi, y = \eta$  に集中荷重  $P$  が作用したときを考え (図 6.9), そのたわみとエネルギーがそれぞれ式(6.57)と式(6.58)とであるとす.  $A_{mn}$  はある特定な値をとっている筈である. 仮想仕事の原理によれば, このような平衡状態のとき, 特定の  $A_{mn}$  だけに小さな変化  $\delta A_{mn}$  を与えてみると, これに応じて外力の作用点 ( $x = \xi, y = \eta$ ) のたわみ  $w$  が  $\delta w$  だけ増して, 外力  $P$  は  $P \delta w$  だけの仕事を板に与え, 一方式(6.58)のひずみエネルギーは,  $\delta A_{mn}$  による分だけ増す. すなわち

$$P \delta w = \frac{\partial W}{\partial A_{mn}} \delta A_{mn} \quad (6.59)$$

式(6.56)から外力の作用点の  $\delta w$  を計算するに、特定の  $A_{mn}$  だけに変化を与えているのだから、

$$\delta w = \left( \delta A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)_{x=\xi, y=\eta} = \delta A_{mn} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}$$

一方、式(6.58)から  $\partial W / \partial A_{mn}$  を求めて

$$\frac{\partial W}{\partial A_{mn}} = \frac{\pi^4 abD}{4} A_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2$$

これらを式(6.59)に代入して  $A_{mn}$  は次のようになる：

$$A_{mn} = \frac{4P \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}}{\pi^4 abD \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

この係数の値を式(9.56)に代入して、

$$w = \frac{4P}{\pi^4 abD} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6.60)$$

このようにして、式(6.54)と同じ結果を得る。数値計算における収束の程度は、分母が  $m, n$  の 4 次式だけであるから、有効数字 3 桁程度を求めるには、はじめの 5~6 項だけを計算すればよい。しかし、それから先は大変に収束が悪くなる。

任意の分布荷重があるときのたわみは、式(6.60)を積分すれば得られる。それには、 $p = f(x, y)$  を与えられた荷重分布の関数とすると、点  $(\xi, \eta)$  に

$$P = f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

なる集中荷重があるとして、式(6.60)を板の全面積にわたって積分すればよい。すなわち

$$w = \frac{4P}{\pi^4 abD} \int_0^b \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} d\xi d\eta$$

積分と和との順序をかえ、 $\xi, \eta$  の積分に関係のある項を取り出して

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(\xi, \eta) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} d\xi d\eta$$

とおけば、上の式は

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

これは前の方法で求めた式(6.30)と同じである。

## 6.7 エネルギー最小の理論による Navier 解の誘導

エネルギー理論によれば、垂直荷重の作用する板の体系全体のエネルギー  $I$  は

$$I = W - V \quad (6.61)$$

ここに、 $W$ は板の全ひずみエネルギーで、 $-V$ は板のうえに分布した荷重によって下がり（たわみ）を生じたための位置エネルギーの減少であって、板の釣合い状態においては、 $I$ が最小になるように板が曲がる。 $W$ は式(5.4)によって与えられる。位置エネルギーについては、 $(x, y)$ 点における微少部分  $dxdy$  に作用する力が  $p dxdy$  で、変位が  $w$  であるから、要素部分の位置エネルギーの減少  $-dV$  は

$$-dV = -w p dxdy, \quad (p = f(x, y))$$

これを板の全面積にわたってせきぶんして、全体の位置エネルギーの減少  $-V$  は

$$-V = -\iint w p dxdy \quad (6.62)$$

式(5.4)と式(6.62)とを式(6.61)に代入して

$$I = \iint \left[ \frac{D}{2} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right\} - w p \right] dxdy \quad (6.63)$$

式(6.63)は板の形、荷重状態、支持条件の如何にかかわらず、板の曲げに用いうる一般式であることが誘導の過程から明らかである。式(6.63)は厳密解を得るのに用いられるのみならず、Rits法のような近似解法にも用いられる。単純支持以外の板の問題を、式(6.63)を使って後で取扱う。

4辺が単純支持の矩形平板に式(6.63)を使って、Navier解(6.30)も求めよう。このときのたわみ  $w$  は

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6.64)$$

の形をとる。ここに  $a_{mn}$  は未知の係数である。ここで問題は式(6.63)の  $I$  が極小値を取るように  $a_{mn}$  を定めることである。そのためには個々の  $a_{mn}$  が

$$\frac{\partial I}{\partial a_{mn}} = 0, \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.65)$$

なる条件を満足しなければならない。

まず、式(6.64)の形を式(6.63)に代入すれば、式(6.58)を使って

$$I = \frac{\pi^4 abD}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \int_0^b \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot f(x, y) dxdy$$

これについて式(6.65)を計算して  $a_{mn}$  を求めれば

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^4 abD} \frac{1}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dxdy$$

この値を式(6.64)に代入して、所要のたわみは

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

ここに

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dxdy$$

これは前の結果の式(6.30)と式(6.29)と同じである。