10 モールの応力円

10.1　1 軸応力度

10.1.1　1 軸応力度

軸方向に引張り力を受ける棒を考える．
x 軸に垂直な断面の応力度

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \tag{10.1}$$

x 軸と ϕ なる角度の法線をもつ断面の応力度

$$\sigma_t = \frac{P}{A}\cos\phi = \sigma_x \cos\phi \tag{10.2}$$

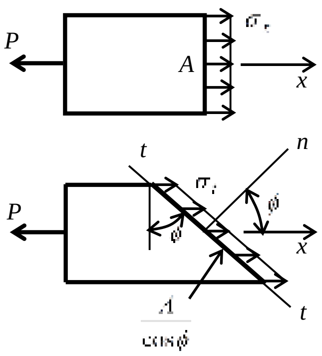


図 10.1　1 軸応力度

斜面上の応力は斜面に垂直方向の応力度(垂直応力度 σ_n)と斜面に沿った応力度(せん断応力度 τ_n)に分解して考える．

$$\sigma_n = \sigma_t \cos\phi = \sigma_x \cos^2\phi = \frac{\sigma_x}{2}(1+\cos 2\phi) \tag{10.3}$$

$$\tau_n = \sigma_t \sin\phi = \sigma_x \sin\phi\cos\phi = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\phi \tag{10.4}$$

したがって，右下がりのせん断応力度を正とする．垂直応力度は引張りを正とする．

さらに，この断面から 90°　傾いた断面の応力度は式(10.3),(10.4)の ϕ に $\phi+90°$ を代入して

$$\sigma'_n = \sigma_x \cos^2(\phi+90°) = \sigma_x \sin^2\phi \tag{10.5}$$

$$\tau'_n = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2(\phi+90°) = -\frac{\sigma_x}{2}\sin 2\phi \tag{10.6}$$

上式より

$$\sigma_n + \sigma'_n = \sigma_x, \quad \tau_n = -\tau'_n \tag{10.7}$$

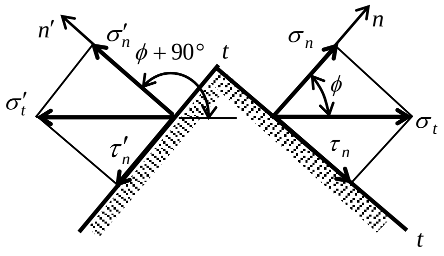


図 10.2　90°　傾いた断面の応力度

式(10.3),(10.4)より次式を得る．

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 \tag{10.8}$$

この式は中心が $\left(\frac{\sigma_x}{2},\ 0\right)$，半径が $\frac{\sigma_x}{2}$ の円である．

10.1.2　モールの応力円

式(10.8)を図示すると次図のようになる．
斜面の法線方向に原点 O から引いた線と円との交点を D とすると

$$\left.\begin{aligned} \sigma_n &= OD' = OC + CD' = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2}\cos 2\phi \\ \tau_n &= DD' = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\phi \end{aligned}\right\} \tag{10.9}$$

同様に

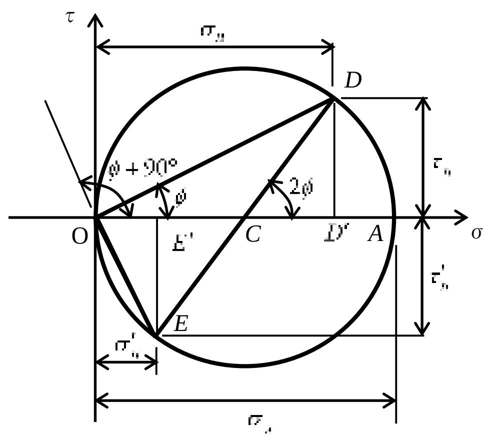


図 10.3 モールの応力円

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n' &= \mathrm{OE}' = \mathrm{OC} - CE' = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2}\cos 2\phi \\ \tau_n' &= EE' = -\frac{\sigma_x}{2}\sin 2\phi\end{aligned}\right\} \tag{10.10}$$

これらは, 先に求めた式(10.3),(10.4)および式(10.5),(10.6)に一致する. この円を**モールの応力円**という.

［**例題 10.1**］断面一様な円形棒（直径 50mm）を 10kN の力で引張った．次の各問に答えよ.

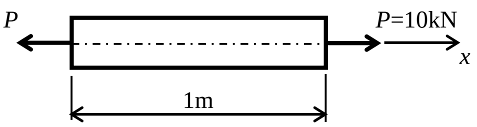


図 10.4　一様な棒の引張り

［解］

(1)　x 軸方向の応力度 σ_x を求めよ.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{10\,000}{3.14 \times 50^2 / 4} = 5.10\,\mathrm{N/mm^2}$$

(2)　法線が x 軸より 30° の角度をなす面の垂直応力度 σ_n とせん断応力度 τ_n を求めよ.

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2}(1+\cos 2\phi) = \frac{5.10}{2}(1+\cos 60^\circ) = \frac{5.10}{2} \times 1.5 = 3.83\,\mathrm{N/mm^2}$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\phi = \frac{5.10}{2}\sin 60^\circ = \frac{5.10}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2.21\,\mathrm{N/mm^2}$$

(3)　この状態のモールの応力円を描け.

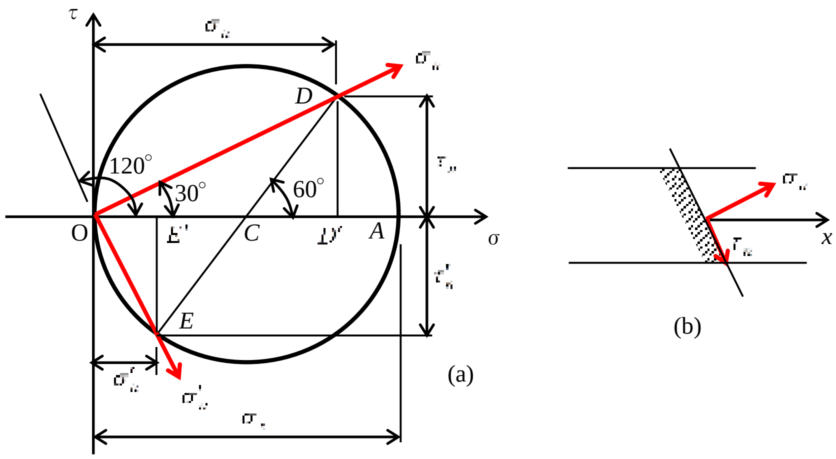
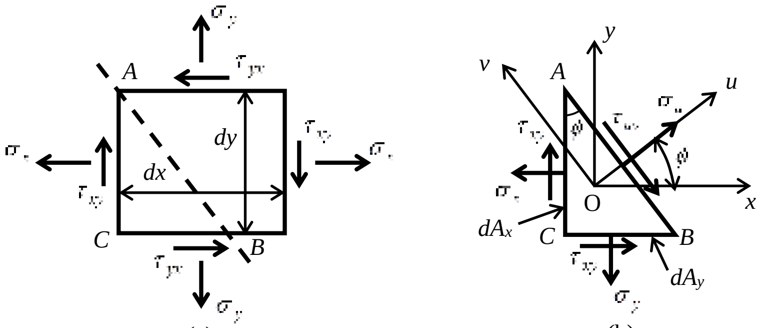


図 10.5 モールの応力円

10.2　2 軸応力度

10.2.1　2 軸応力度

物体に力が作用すると，その内部には応力が発生する．内部の微小要素を考える（図(a)）．



(a)　　(b)

図 10.6　2 軸応力度

図(a)において $\Sigma M_C = 0$ をとると $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ の関係が得られる．これを**せん断応力の共役**という．

図(a)の応力状態において任意の斜面 AB 上の応力を求める．図(b)の微小三角要素を考える．

図(b)のように x,y 軸を原点 O の回りに ϕ だけ回転させた新しい直交軸 u, v を定め，u 軸に垂直な面 AB の垂直応力 σ_u とせん断応力 τ_{uv} を求める．

斜面 AB の面積を dA_n とすると AC，CB の面積は

$$dA_x = dA_n \cos\phi, \quad dA_y = dA_n \sin\phi \tag{10.11}$$

x 軸方向，y 軸方向の釣合いをとると

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_u dA_n \cos\phi + \tau_{uv} dA_n \sin\phi - \sigma_x dA_x + \tau_{xy} dA_y = 0 \\ &\sigma_u dA_n \sin\phi - \tau_{uv} dA_n \cos\phi - \sigma_y dA_y + \tau_{xy} dA_x = 0 \end{aligned}\right\} \tag{10.12}$$

これを連立して解くと次のように斜面上の応力が得られる．

$$\left.\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\phi - \tau_{xy}\sin 2\phi \\ \tau_{uv} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\phi + \tau_{xy}\cos 2\phi \end{aligned}\right\} \tag{10.13}$$

さらに，斜面 AB より 90° 回転した断面の応力度は ϕ に $\phi + 90^\circ$ を代入して変形すると

$$\left.\begin{aligned} \sigma'_u &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\phi + \tau_{xy}\sin 2\phi \\ \tau'_{uv} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\phi - \tau_{xy}\cos 2\phi \end{aligned}\right\} \tag{10.14}$$

式(10.13),(10.14)より

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_u + \sigma'_u = \sigma_x + \sigma_y = \text{一定} \\ &\tau_{uv} = -\tau'_{uv} \end{aligned}\right\} \tag{10.15}$$

が得られる．

［**問題 10.1**］ $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ を証明せよ (ヒント．図 10.6(a)において点 C での釣合いを考えよ).

［**問題 10.2**］式(10.12)から式(10.13)を求めよ．

［**問題 10.3**］式(10.13)から式(10.14)を求めよ．

10.2.2　モールの応力円 1

x, y 軸を主応力軸とすれば τ_{xy} は 0 となるから，斜面 AB 上に働く応力は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}\sigma_u &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\phi \\ \tau_{uv} &= \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\phi\end{aligned}\right\} \tag{10.16}$$

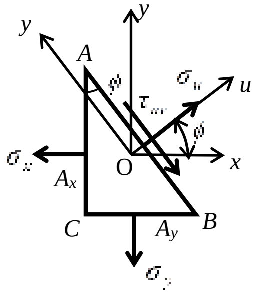


図 10.7

この式より ϕ を消去すると

$$\left(\sigma_u-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{uv}^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 \tag{10.17}$$

が得られる．この式は

$$中心\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},0\right),\quad 半径\ R=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$$

の円の方程式である．この円を**モールの応力円**という．

［**例題 10.2**］$\sigma_x>\sigma_y>0$ で x 軸から ϕ の角度の法線をもつ面の応力をモールの応力円を用いて求めよ．

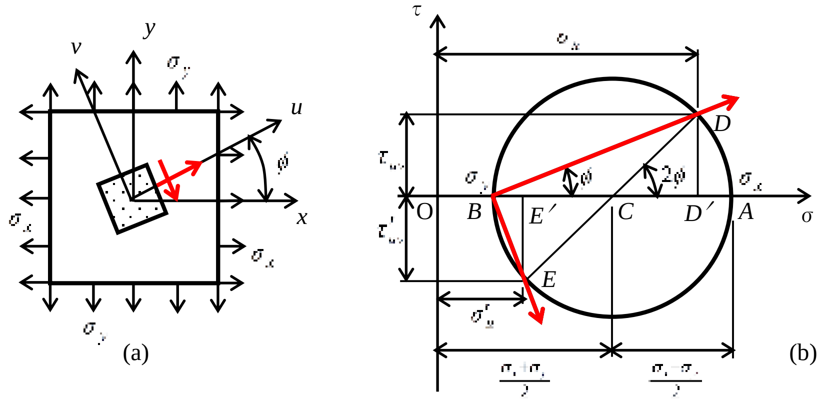


図 10.8　モールの応力円

(1)　$OA=\sigma_x$, $OB=\sigma_y$ にとる．

(2)　AB を直径とする円を描く．

(3)　x 軸から $\angle DBA=\phi$（あるいは $\angle DCA=2\phi$）となるような点 D を円上に定める．

(4)　$\sigma_u=OD'$, $\sigma_u'=OE'$ である．すなわち

$$\left.\begin{aligned}\sigma_u &= OD'=OC+CD'=OC+CD\cos 2\phi=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\phi \\ \tau_{uv} &= DD'=CD\sin 2\phi=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\phi\end{aligned}\right\} \tag{10.18}$$

モールの円より $2\phi=0,\ 2\pi$ でそれぞれ $\sigma_u=\sigma_x$, σ_y となる．

$2\phi=\pi/2$ でせん断応力は最大となり

$$\tau_{uv}=\tau_{max}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} \tag{10.19}$$

［**問題 10.4**］

(1)　$\sigma_x=20.0\,\mathrm{N/mm^2}$, $\sigma_y=5.0\,\mathrm{N/mm^2}$ で x 軸から $30°$ の角度の法線をもつ面の応力を求めよ．

(2)　$\sigma_x=20.0\,\mathrm{N/mm^2}$, $\sigma_y=-5.0\,\mathrm{N/mm^2}$ で x 軸から $30°$ の角度の法線をもつ面の応力を求めよ．

(3)　$\sigma_x=-20.0\,\mathrm{N/mm^2}$, $\sigma_y=5.0\,\mathrm{N/mm^2}$ で x 軸から $30°$ の角度の法線をもつ面の応力を求めよ．

10.2.3　モールの応力円 2

垂直応力度，せん断応力度が同時に作用している場合のモールの応力円を求める．

式(10.13)より

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{uv}^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\right)^2 \tag{10.20}$$

が得られる．この式は中心が$\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$，半径が$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$の円の方程式である．

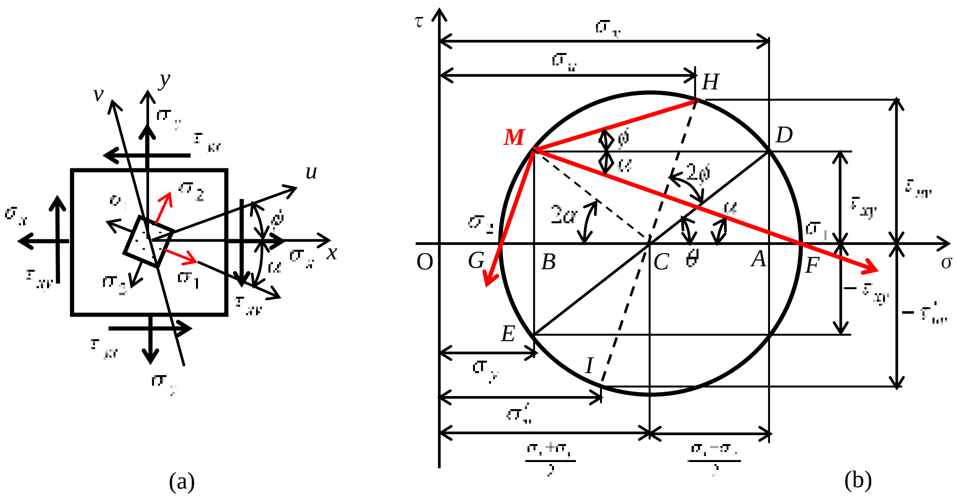


図 10.9　モールの応力円

これを描く手順は次の通り．

1. σ, τをそれぞれ横軸，縦軸に設定し，$OA = \sigma_x$，$OB = \sigma_y$をとる．
2. $AD = \tau_{xy}$，$BE = -\tau_{xy}$となる点 D,E を定め，DE を直径とする円を描く．
3. D からの水平線と E からの垂直線の交点 M より斜面への垂直線 MH（x 軸からの角度ϕ）を引く．**M を極**という．
4. O から H までの水平距離がσ_u，垂直距離がτ_{uv}となる（式(10.13)）．
5. σ_uの最大値，最小値は図の OF，OG であり，このとき$\tau_{uv} = 0$である．この応力を**主応力**といい，それを与える断面を**主応力面**という．

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_1\\ \sigma_2\end{array}\right\} = \mathrm{OC}\left\{\begin{array}{l}+CF\\ -CG\end{array}\right. = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{10.21}$$

6. 主応力σ_1, σ_2の作用する方向はそれぞれ MF，MG の方向である．

$$\tan 2\alpha = -\frac{\tau_{xy}}{\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \tag{10.22}$$

［**問題 10.5**］モールの応力円よりσ_u，τ_{uv}の式を求めよ．

［**問題 10.6**］$\sigma_x = 20.0\mathrm{N/mm^2}$，$\sigma_y = -5.0\mathrm{N/mm^2}$，$\tau_{xy} = 3.0\mathrm{N/mm^2}$でのとき x 軸から$30°$の角度の法線をもつ面の応力度を求め，モールの応力円を描け．また，主応力の大きさとその方向を求めよ．

10.2.4　純粋せん断

［**例題 10.3**］要素に作用する応力が $\sigma_x = -\sigma_y = \sigma$ のとき $\phi = 45°$ の法線をもつ面の応力状態を示せ.

［解］

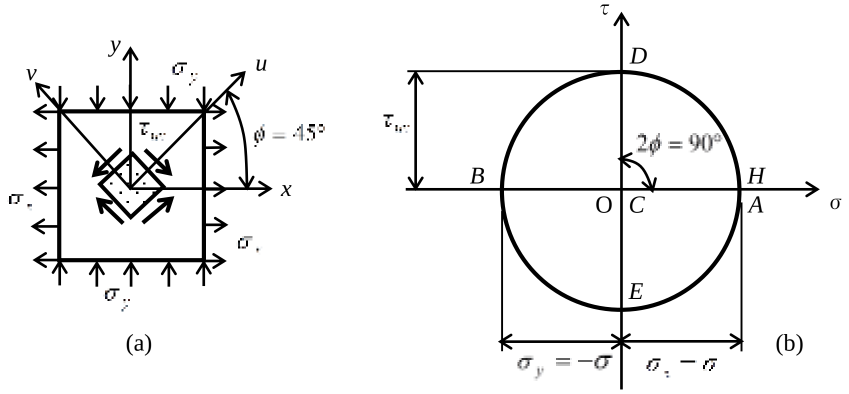


図 10.10　純粋せん断

$\phi = 45°$ の法線をもつ面では垂直応力度 σ_u は 0 で $\tau_{uv} = \sigma$ なるせん断応力のみが作用する状態が生じる.このような応力状態を純粋せん断と呼ぶ.

［**例題 10.4**］要素にせん断応力 $\tau_{xy} = -\tau_{yx} = \tau$ のみが作用する場合の応力状態を示せ.

［解］ $\sigma_x = \sigma_y = 0,\ \tau_{zy} > 0$ としてモールの応力円を描けば次図のようになる.

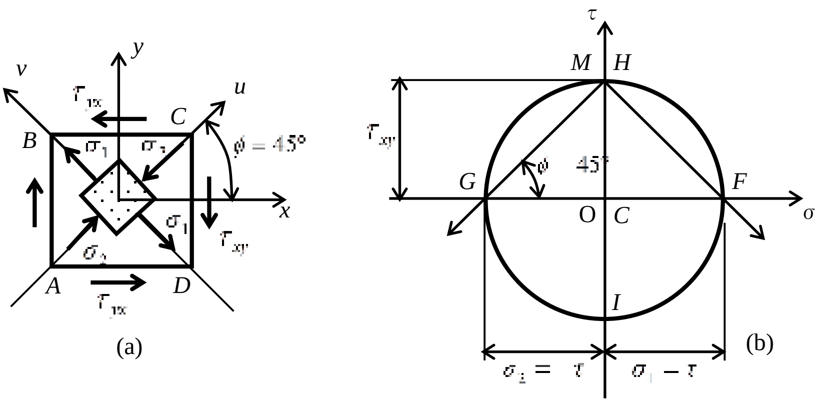


図 10.11　純粋せん断

円の中心 C は原点 O と一致し，極 M は点 H と一致する．したがって，主応力面は x 軸に対して±45° の方向にある．このような応力状態も**純粋せん断**と呼ぶ.

ちょっと休憩[10-1]（σ'_n（式(10.5)）の別の誘導）

$$\phi' = 180° - (\phi + 90°) = 90° - \phi$$

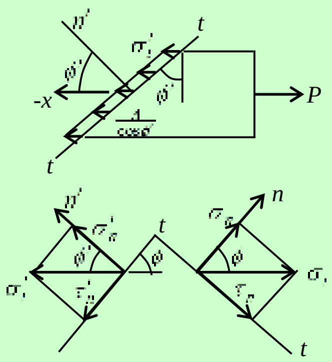
$$\sin(90° - \phi) = \cos\phi,\quad \cos(90° - \phi) = \sin\phi$$

$$A' = A / \cos\phi'$$

$$\sigma'_t = \frac{P}{A'} = \frac{P}{A}\cos\phi' = \sigma_x \cos\phi'$$

$$\sigma'_n = \sigma'_t \cos\phi' = \sigma_x \cos^2\phi' = \sigma_x \cos^2(90° - \phi) = \sigma_x \sin^2\phi \ \ \phi'$$

$$\tau'_n = \sigma'_t \sin\phi' = \sigma_x \sin\phi' \cos\phi' = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\phi' = \frac{\sigma_x}{2}\sin(180° - 2\phi) = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\phi$$



10.2.5　主応力

図 10.9(b)の平面応力状態において，せん断応力 τ_{uv} が 0 になるような面を主応力面という．
主応力面に働いている垂直応力を主応力と呼ぶ．
互いに直交している面に働くせん断応力は等しいから，1 つの主応力面に直交する面もまた主応力面となる．

式(10.13)で $\tau_{uv}=0$ と置けば，主応力面が x 軸となす角 ϕ は次式で求められる．

$$\tan 2\phi = -\frac{\tau_{xy}}{\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}} \tag{10.23}$$

また式(10.13)より σ_u を ϕ で微分すると

$$\frac{d\sigma_u}{d\phi} = -(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\phi - 2\tau_{xy}\cos 2\phi \tag{10.24}$$

が得られるが，$d\sigma_u/d\phi=0$ とおくと，式(10.23)が得られる．このことは，式(10.23)の ϕ は σ_u の極値を与えることを示している．式(10.23)が満足されるときの σ_u の最大値(最大主応力) σ_1 と最小値(最小主応力) σ_2 は次式のように得られる．

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{10.25}$$

また，このときのせん断応力 τ_{xy} の最大値と最小値は次のようになる．

$$\left.\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{10.26}$$

これらを主せん断応力といい，これが生じる面を主せん断応力面と呼ぶ．これは主応力面と 45° の傾きをなす．

ちょっと休憩[10-2](斜面上の応力度)

2 軸応力度（図 10.6）において，せん断応力が逆向きの場合の応力度：

斜面上の応力度

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\phi + \tau_{xy}\sin 2\phi$$

$$\tau_{uv} = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\phi + \tau_{xy}\cos 2\phi$$

である．