はりのたわみの計算雑感

（投稿論文）

島根県土質技術研究センター　浜野　浩幹（081125）

1.　はじめに

はりのたわみの計算は，一般に大学等では

1. 弾性曲線による解法，微分方程式を解き，境界条件，連続条件を適用する方法

2. 弾性荷重法による解法，微分方程式の荷重強度を，弾性荷重に置き換えて解く方法

等を勉強する．さらに進めば

3. ひずみエネルギーを使って解く

4. 仮想仕事の原理によって解く

5. カスチリアーノの定理によって解く

6. 最小仕事の定理によって解く

方法等が挙げられる．上の 3～6 は，手をかえ品をかえてやっているだけで，同系統の解法に属する．しかし，問題によってはこのうちのどれかで解くと極めて簡単に解ける場合がある．また，これらの解法は，はりのみでなくてトラス，ラーメン等にも適用できる万能の解法である．また，

7. たわみ角法による解法

8. マトリクス法（有限要素法）による解法

等もある．8 番目は計算機に頼らなければ殆ど解けないが，大きな問題の解析が可能である．しかし，それ相当のソフトが必要になる．

他にもいろいろあるかもしれないが，思いつくままざっと拾ってみると，その多さにびっくりする．

2.　計算例

はりについては，物理量はせん断力，曲げモーメント，変位量はたわみ角，たわみがある．ここでは，たわみの求め方について，図 1 に示す問題について何種類かを行ってみる．

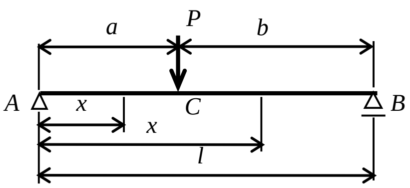

図 1　集中荷重の作用する単純ばり

(1) 弾性曲線による解法

関係する弾性曲線の微分方程式は，たわみ y から出発して，順にたわみ角，曲げモーメント，せん断力，荷重強度に対応する．

$$\left.\begin{array}{l} y \\ \dfrac{dy}{dx}=0 \\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{E}{EI} \\ \dfrac{d^3y}{dx^3}=-\dfrac{Q}{EI} \\ \dfrac{d^4y}{dx^4}=\dfrac{q}{EI} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

ここに，EI は**曲げ剛性**である．静定構造物では反力が簡単に求められ，したがって曲げモーメントが求められるから，式(1)の第 3 の式から順に上に積分していく．このとき，未知積分定数は 2 個発生する．また曲げモーメントが求めにくい不静定構造物等では，最後の式から上に積分していくことになる．この場合，未知積分定数は 4 個発生する．

これらの積分定数を決定するには，両支点の境界条件と荷重作用点の連続条件が必要となる．

境界条件

左端 x=0 または右端 x=l において

$$\left.\begin{array}{lll} \text{単純支持} & y=0, & M=0 \\ \text{固定端} & y=0, & \theta=0 \\ \text{自由端} & Q=0, & M=0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

連続条件

集中荷重の作用点 x=a では

$$y_1=y_2,\ \theta_1=\theta_2,\ Q_1=Q_2+P,\ M_1=M_2 \qquad (3)$$

以上の準備で全てのはりのたわみが求まるはずである（というわけにはなかなか行かず，問題によってはひねくりまわさなければならない場合が出てくる）．

図 1 の集中荷重が作用する場合は，荷重の作用点の左と右で曲げモーメントが異なるから，微分方程式が 2 つ必要となり積分定数が増える．したがって連続条件を使用しなければならない．

計算：

荷重より左のたわみを y_1，右のそれを y_2 とすると $0 \le x \le a$ の範囲では

$$\text{曲げモーメント：}M_x=\frac{Pb}{l}x \qquad (4)$$

これを式(1)の第3式に代入して積分すると

$$\left.\begin{aligned} EI\frac{dy_1}{dx} &= -\frac{Pb}{2l}x^2 + C_1 \\ EIy_1 &= -\frac{Pb}{6l}x^3 + C_1 x + C_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$a \le x \le l$ の範囲では

曲げモーメント： $M_x = \dfrac{Pb}{l}x - P(x-a)$　(6)

であるから

$$\left.\begin{aligned} EI\frac{dy_2}{dx} &= -\frac{Pb}{2l}x^2 + \frac{P}{2}(x-a)^2 + D_1 \\ EIy_2 &= -\frac{Pb}{6l}x^3 + \frac{P}{6}(x-a)^3 + D_1 x + D_2 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式(5),(7)に次の境界条件

$$x = 0 : y_1 = 0, \quad x = l : y_2 = 0 \tag{8}$$

と連続条件

$$x = a : y_1 = y_2,\ x = a : \theta_1 = \theta_2 \tag{9}$$

を適用すると，4つの未知積分定数は

$$C_2 = 0,\ D_2 = 0,\ C_1 = D_1 = \frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2) \tag{10}$$

と求められ，それぞれの範囲でのたわみ曲線は（たわみ角曲線は省略）

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{Pb}{6EIl}\{(l^2-b^2)x - x^2\} \\ y_2 &= \frac{P}{6EIl}\{b(l^2-b^2-x^2)x + l(x-a)^3\} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

と得られる．

(2) 弾性荷重法による解法

弾性曲線法は，はり全体の弾性曲線が得られるのに対して，弾性荷重法は求めたい点のたわみ，たわみ角が直接求められる便利さがある．方法は，きわめて簡単で次の手順による．

(1) 実際の荷重による曲げモーメント図を求める．

(2) この曲げモーメント図に $1/EI$ を掛けたもの（弾性荷重）を共役ばりに作用させる．

(3) この共役ばりのせん断力を求めればそれが実際のはりのたわみ角になり，曲げモーメントを求めればそれがたわみとなる．

共役ばりとは，弾性荷重を作用させるはりを実際のはりの境界条件に合わせたもので，実際のはりの境界条件と共役ばりのそれは次のような関係になる．

固定端	↔	自由端
単純支持端	↔	単純支持端
中間単純支持点	↔	ゲルバーヒンジ

計算：図2は実際のはりと共役ばりを示す．

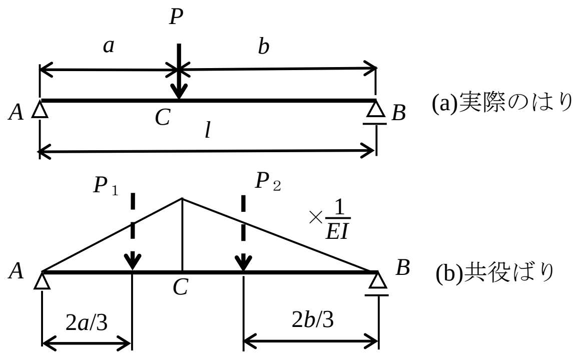

図2　弾性荷重法による解法

共役ばりにおいて

$$P_1 = \frac{Pa^2 b}{2l},\quad P_2 = \frac{Pab^2}{2l} \tag{12}$$

が三角形の図心位置に作用するとして，反力は

$$\left.\begin{aligned} R'_A &= \frac{1}{l}\left\{P_1\left(\frac{a}{3}+b\right) + P_2\frac{2b}{3}\right\} = \frac{Pab(l+b)}{6l} \\ R'_B &= P_1 + P_2 - R'_A = \frac{Pab(l+a)}{6l} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ゆえに，共役ばりのせん断力

$$Q_{C'} = R_{A'} - P_1 = \frac{Pab(b-a)}{3l} \tag{14}$$

に対して，実際のはりのたわみ角は

$$\theta_C = \frac{Q_{C'}}{EI} = \frac{Pab(b-a)}{3EIl} \tag{15}$$

が得られる．同様にたわみは次のようになる．

$$M_{C'} = R_{A'}a - P_1\frac{a}{3} = \frac{Pa^2b^2}{3l} \Rightarrow y_C = \frac{M_{C'}}{EI} = \frac{Pa^2b^2}{3EIl} \tag{16}$$

弾性荷重法は実際のはりの曲げモーメントを荷重に使用するため，積分の次数が1次上がる事になるが，積分することを厭わなければいろいろな荷重に対応でき有用な解法である．

(3) ひずみエネルギーを用いて解く

荷重が作用すると，構造物の内部にエネルギーが蓄えられる．荷重が除去されると，このエネルギーは変形を元に戻そうとする力として働く（内力のなす仕事）．すなわち

（外力のなす仕事）=（内力のなす仕事）

が成り立つ．これを利用する．はりのひずみエネルギーは次式で表される．

$$W = \frac{1}{2}\int_l \frac{M^2}{EI}dx \tag{17}$$

計算：図3のように距離 x, x' を取るものとすれ

ば AC 間，CB 間の曲げモーメントは

$$M_x = \frac{Pb}{l}x, \quad M_{x'} = \frac{Pa}{l}x' \tag{18}$$

したがって，ひずみエネルギーは

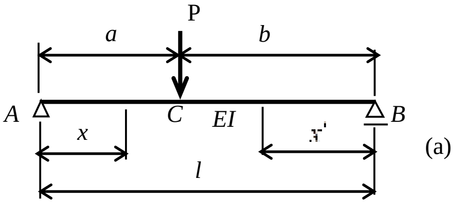

図 3　ひずみエネルギーによる解法

$$W_i = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{1}{EI}\left(\frac{Pb}{l}x\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^b \frac{1}{EI}\left(\frac{Pa}{l}x'\right)^2 dx' = \frac{P^2a^2b^2}{6EIl} \tag{19}$$

外力 P のなす仕事は $W_0 = \dfrac{1}{2}Py_c$ である．この外力のなす仕事が，はりの内力のなす仕事 W_i，すなわち，ひずみエネルギーに等しいから

$$\frac{1}{2}Py_c = \frac{P^2a^2b^2}{6EIl} \quad \text{ゆえに} \quad y_c = \frac{Pa^2b^2}{3EIl} \tag{20}$$

(4) 仮想仕事による解法

この問題を仮想仕事によって解いてみる．曲げ構造物の場合，変位を求めるには，**求めたい点に求めたい方向に単位仮想荷重 $\bar{P}=1$ を作用させる．**このとき変位は次式で求められる．

$$1\cdot\delta_i = \int_l \frac{\bar{M}M}{EI}dx \tag{21}$$

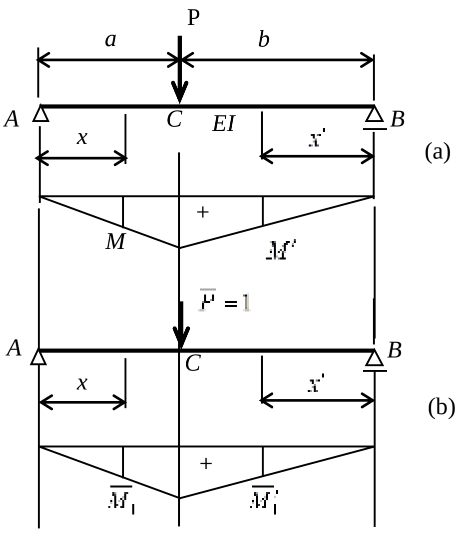

図 4 仮想荷重による解法

式中，M は実際の荷重による曲げモーメント，$\bar{M}$ は仮想荷重による曲げモーメントである．

実際の荷重による曲げモーメントは

$$M = \frac{Pb}{l}x, \quad M' = \frac{Pa}{l}x' \tag{22}$$

仮想荷重による曲げモーメントは

$$\bar{M}_1 = \frac{b}{l}x, \quad \bar{M}_1' = \frac{a}{l}x' \tag{23}$$

これらを式(21)に代入して，たわみは

$$1\cdot y_C = \int_0^a \frac{M\bar{M}_1}{EI}dx + \int_0^b \frac{M\bar{M}_1'}{EI}dx$$
$$= \frac{1}{EI}\int_0^a \frac{Pb^2}{l^2}x^2dx + \frac{1}{EI}\int_0^b \frac{Pa^2}{l^2}x^2dx = \frac{Pa^2b^2}{3EIl}$$

と得られる．

(5) たわみに対する考察

他の解法も同様にして行う．いずれにしても，弾性曲線による解法が基本であり，これを十分理解する必要があるが，問題によっては，そう簡単には解けない場合が出てくる．

例えば，集中荷重が 2 個作用するようなはり（図 5）では，積分定数が 6 個になり，連立方程式を解きあぐねる．また，部分分布荷重（図 6）が作用するような系では，連続条件の適用で困ってしまう．

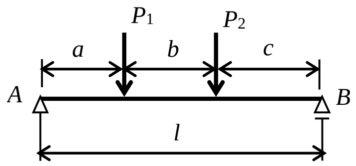

図 5　2 個の集中荷重が作用する系

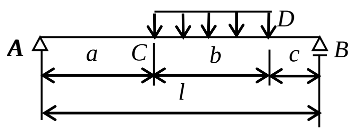

図 6　部分分布荷重が作用する系

これらに対しては，次のような定義を導入することによって簡単に解くことができる．

$$<x-a>^n = \begin{cases}(x-a)^n & \cdots\ x>a \\ 0 & \cdots\ x\le a\end{cases} \tag{25}$$

これを**マコーレーのカッコ**という．これによると，積分しても 2 個の積分定数しか発生しないから，連続条件を持ち出さなくても，境界条件だけで解く事ができる．

図 1 の問題の場合，曲げモーメントは

$$M_x = R_Ax - P<x-a> \tag{26}$$

で表される．これを弾性曲線の微分方程式に代入すると

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{1}{EI}(R_Ax - P<x-a>) \tag{27}$$

項目(1)と同様に，2 回積分して境界条件を適用すると，たわみは次のように得られる．

$$y=-\frac{1}{EI}\left(\frac{Pb}{6l}x^3-\frac{P}{6}<x-a>^3\right)+\frac{Pab(l+b)}{6EIl}x \quad (28)$$

式(11)のたわみが一本の式で表されている.

［問題］さらに次のような問題を解いてみる.

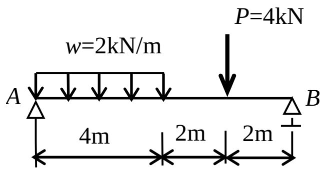

図 7 部分分布荷重と集中荷重が作用する系

式(25)の定義により曲げモーメントは

$$M_x=R_Ax-\frac{w}{2}x^2+\frac{w}{2}<x-4>^2-P<x-6> \quad (29)$$

これを弾性曲線の微分方程式に代入すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M_x}{EI}=-\frac{1}{EI}\left[7x-x^2+<x-4>^2-4<x-6>\right] \quad (30)$$

したがって

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=-\frac{1}{EI}\left[\frac{7}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}<x-4>^3-2<x-6>^2\right]+C_1\\ y&=-\frac{1}{EI}\left[\frac{7}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{12}<x-4>^4-\frac{4}{6}<x-6>^3\right]+C_1x+C_2\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

これに単純ばりの境界条件を適用すると

$x=0$ ：$y=0\rightarrow C_2=0$，$x=8$：$y=0\rightarrow C_1=\frac{34}{EI}$

したがって，たわみは (32)

$$y=-\frac{1}{EI}\left[\frac{7}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{12}<x-4>^4-\frac{2}{3}<x-6>^3-34x\right] \quad (33)$$

これで解けた（たわみ角は省略）．この問題は普通に解くと結構厄介かも知れない.

3 おわりに

ところが，これでもまだ解くことが困難な問題が存在するが，理論が確立しているものは計算機で処理することが可能である．ただし，数値計算であるから，式(33)に見られるような厳密解は求められない.

頁の都合で書けなかったことを問題にする.

［問題］

(1) 図 5,6 の解（たわみ）を求めよ.

(2) 式(26),(29)を式(25)の定義に従って求めよ.

参考文献：1)浜野：**構造力学問題集，2002**.
2)谷本,浜野：**平板の曲げ，2007**.

（**協会便り**，中国地質調査業協島根支部，20 号，0811）