

# 任意断面形状孔の応力・変位の計算

浜野 浩 幹

## 1. はじめに

応力, 変位を求める場合, その形状が何らかの関数で表示できれば, 複素関数論等を用いて弾性解を求めることができる. 任意形状断面の写像関数を決定することは, 多くの研究者によって試みられているが, ここでは, P.V.Melentiev の方法を用いて任意形状断面の写像関数を求め, 2次元面内応力  $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty$  および  $\tau_{xy}^\infty$  がトンネルの径に比較して十分遠い位置から作用する場合の面内応力を求める.

## 2. 写像関数の決定

P.V.Melentiev の方法写像関数の計算方法を簡単に示す. 等方性弾性体内の任意形状孔の内部に原点をもち, 孔の母線が  $z$  軸に平行で, これに直交して  $x, y$  軸となる直角座標系  $(x, y, z)$  を設ける. この孔の境界は一般に次式で与えられるものとする.

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha_0 \cos \theta + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta), \\ x &= \alpha_0 \sin \theta - \sum_{n=1}^N (\alpha_n \sin n\theta - \beta_n \cos n\theta), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに,  $\alpha_n, \beta_n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ) は孔の断面形状により決まる実定数であり,  $N$  は正の整数を表し,  $\theta$  は  $x$  軸の正の方向より反時計周りに計った角度である. 例えば, 空洞の断面が円形の場合には,  $\alpha_n = \beta_n = 0$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ) に, 楕円形の場合には,  $\beta_1 = \beta_n = \alpha_n = 0$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ) に設定すればよい.

ここで, トンネルが存在する断面の座標面の孔縁およびその外部を複素変数  $z$  で表し, これを次式のように  $\zeta$  - 平面内の単位円およびその外部に変換する写像関数  $\omega(\zeta)$  を考える.

$$z = x + iy = \omega(\zeta) = \alpha_0 \zeta + \sum_{n=1}^N (\alpha_n + i\beta_n) \zeta^{-n} \quad (2)$$

ここに,  $\zeta = \rho e^{i\theta}$  ( $\rho \geq 1$ ) であり,  $\rho = 1$  のとき  $z$  - 平面上の孔縁が, また,  $\rho > 1$  のときその外部領域がそれぞれ対応することになる.

確認のために次の簡単な図形の写像関数を求めてみた.

- (1) 半径 5 の円:  $z = 5.0\zeta$
- (2) 長円  $a = 1.2$ , 短円  $b = 1$  の楕円:  $z = 5.5\zeta - 0.5\zeta^{-1}$
- (3) 一辺 3 の正方形:  $z = 3.5795\zeta - 0.6351\zeta^{-5} + 0.0418\zeta^{-7} + 0.0138\zeta^{-11}$

これらは正しい結果を与えている.

## 3. 応力の計算

地山作用荷重は 2次元面内応力  $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty$  および  $\tau_{xy}^\infty$  がトンネルの径に比較して十分遠い位置から作用するものと仮定すれば, 無限遠での主応力  $\sigma_1^\infty, \sigma_2^\infty$  と  $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$  の関係は次式のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^\infty &= \frac{1}{2}(\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) + \frac{1}{2}(\sigma_1^\infty - \sigma_2^\infty) \cos 2\phi, \\ \sigma_y^\infty &= \frac{1}{2}(\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) - \frac{1}{2}(\sigma_1^\infty - \sigma_2^\infty) \cos 2\phi, \\ \tau_{xy}^\infty &= \frac{1}{2}(\sigma_1^\infty - \sigma_2^\infty) \sin 2\phi, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに,  $\phi$  は  $x$  軸と  $\sigma_1^\infty$  の作用方向の間を反時計方向に測った角度である (図 1).

さて、等方性弾性体に対する  $z$  平面内の任意位置における応力、変位は複素解析関数  $\phi(z), \psi(z)$  を用いて次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re}[\phi'(z)], \\ \sigma_x - \sigma_y + \tau_{xy} &= 2\{z\overline{\phi'(z)} + \psi'(z)\}, \\ 2G(u - iv) &= k\overline{\phi(z)} - z\phi'(z) - \psi(z), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \kappa = \begin{cases} 3-4\nu & (\text{平面ひずみ}) \\ \frac{3-\nu}{1-\nu} & (\text{平面応力状態}) \end{cases} \quad (5)$$

$E, \nu$  はそれぞれ弾性係数、ポアソン比である。

任意形状のトンネル断面形に沿う直行座標系  $(\xi, \eta)$  での応力、変位は写像関数  $\omega(\zeta)$  を用いて次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\eta + \sigma_\xi &= \sigma_x + \sigma_y, \\ \sigma_\eta - \sigma_\xi - 2i\tau_{\xi\eta} &= \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} (\sigma_x - \sigma_y + \tau_{xy}), \\ u_\xi - iv_\eta &= \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} (u - iv) \end{aligned} \right\}$$

以上から  $\phi(z), \psi(z)$  を決定すれば、必要な力学量が求められることになる。

#### 4. 計算例

馬蹄形トンネルに、水平線より反時計回りに  $60^\circ$  回転した方向から面内荷重  $\sigma_1^\infty$  が作用した場合の、接線方向応力  $\sigma_\eta$  の分布図を、高さを変えて計算した結果を示す(図2)。この場合、孔の高さが高くなるにつれて、すなわち、図2(a)の断面形をさらに掘削して図2(b,c)の状態になった場合、下端左右における応力集中が緩和されていることがわかる。

#### 5. おわりに

ここでは、等方性弾性岩盤に掘削された任意形状の素掘りトンネル縁の応力を弾性厳密解を用いて解析し、計算例を示した。計算例で示したように任意断面のものを取り扱うことができるため、より厳密な施工管理が可能となる。

また、この計算は、世界遺産候補として申請されている石見銀山の間歩等の維持管理の解析に使用できるものと思われる。(060910)

参考文献：浜野他：複素写像関数による無限体内の孔径状の断面決定と応力、変位解析、土学会 47 回講演会概要集、(1992)。

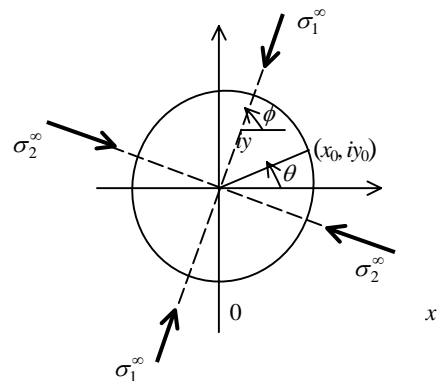


図1 面内荷重における座標系

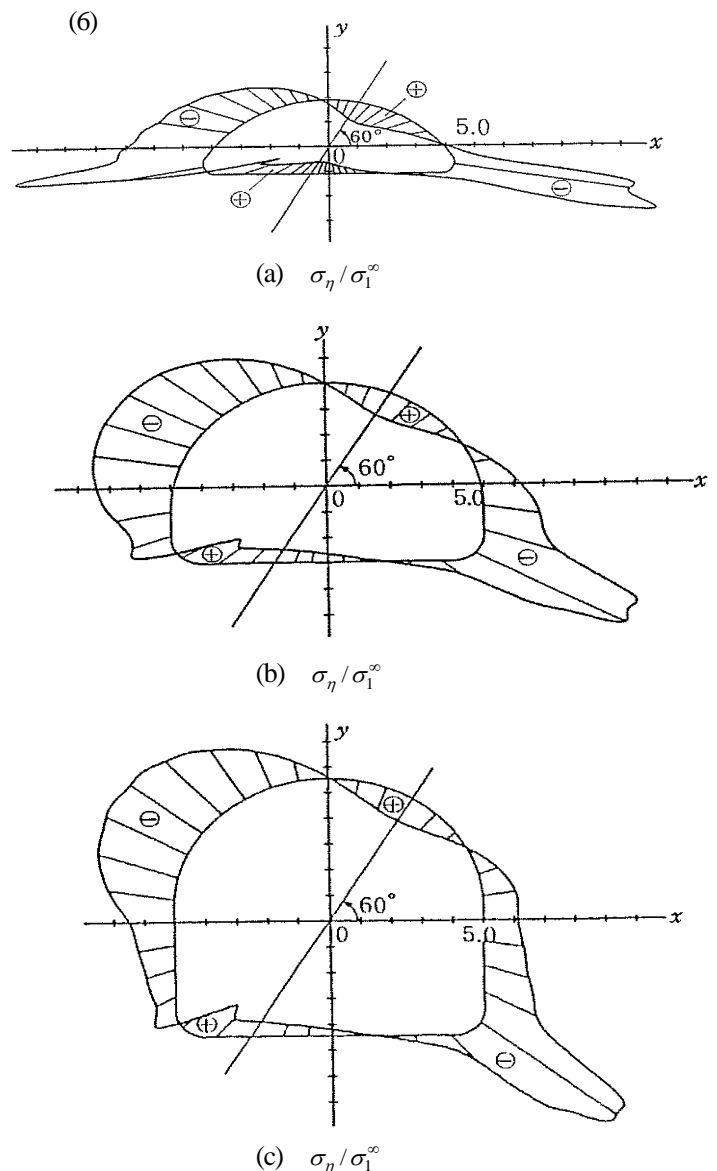


図2. 馬蹄形断面の面内応力