Fourier 級数を理解するための例

図 1 のような矩形平板の全表面に一様な分布荷重 p が存在する問題を解こう．板の巾 b は径間 a にくらべて十分大きくて，板の内部では自由辺（$y=\pm b/2$）の影響がないと考えてよい．

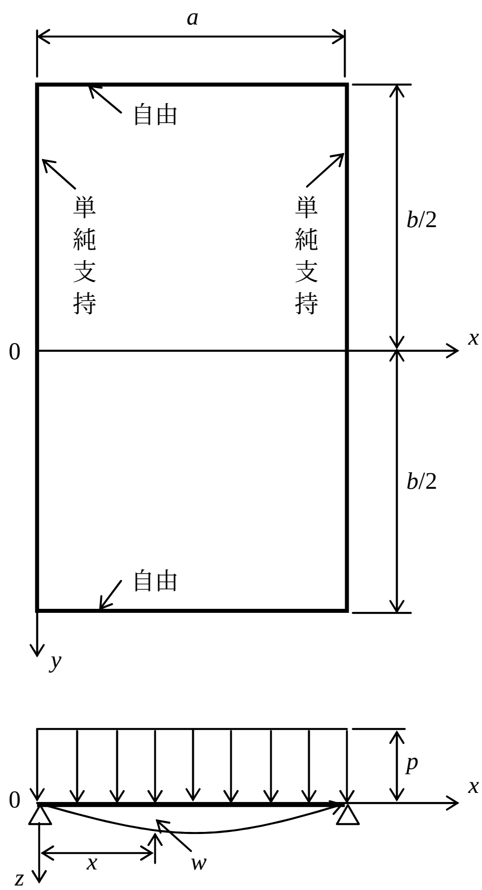

図 1　巾の広い矩形平板

1)　微分方程式による解

このときにはたわみ w は座標 y には無関係になる．よって微分方程式は今の場合には

$$\frac{d^4w}{dx^4}=\frac{p}{D} \tag{1}$$

ここに

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

式(1)を積分して

$$w=\frac{p}{24D}(x^4+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4) \tag{2}$$

ここに，c_1,c_2,c_3,c_4 は定数であって，境界条件を満足するように定められなければならない．これを定めるには，x=0 と x=a の辺が単純支持であるから

$$\left.\begin{aligned}(w)_{x=0}&=0, \quad \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x=0}=0\\(w)_{x=a}&=0, \quad \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x=a}=0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

式(2)を式(3)に代入して

$$c_4=0,\quad a^3+c_1a^2+c_2a+c_3=0,\quad c_2=0,\quad 2a+c_1=0$$

よって

$$c_1=-2a,\quad c_2=0,\quad c_3=a^3,\quad c_4=0$$

この値を式(2)に代入して，所要のたわみ w は次の結果になる．

$$w=\frac{px}{24D}(x^3-2ax^3+c_2x^2+a^3) \tag{4}$$

式(4)は単純張りに一様分布荷重があるときのたわみの式によく似た式である [1)].

曲げモーメントは

$$M_x=-D\frac{\partial^2w}{\partial x^2}=\frac{px}{2}(a-x) \tag{5}$$

1)　単純張りのたわみは $w=\dfrac{px}{24EI}(x^3-2ax^3+c_2x^2+a^3)$ で EI が D に変わっただけである．

たわみ w と曲げモーメント M_x との最大は，中央（$x=a/2$）で起こり

$$w_{\max} = \frac{5pa^4}{384D}, \quad (M_x)_{\max} = \frac{pa^2}{8} \tag{6}$$

2) Fourier 級数による解

つぎに，今の問題の解を式(4)の代わりに，Fourier 級数の形で求めることを考えよう．それには，式(1)の右辺を $0 < x < a$ の範囲で Fourier 級数に展開して

$$\frac{p}{D} = \frac{4p}{\pi D}\left(\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{a} + \cdots\right) = \frac{4p}{\pi D}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{7}$$

式(7)の証明．一般に，$0 < \xi < 2\pi$ の範囲内で定義せられた関数 $f(\xi)$ の Fourier 級数表現は

$$f(\xi) = a_0 + a_1\cos\xi + a_2\cos 2\xi + \cdots + b_1\sin\xi + b_2\sin 2\xi + \cdots \tag{8}$$

ここに

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\xi)d\xi, \quad a_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\xi)\cos\xi d\xi, \quad a_2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\xi)\cos 2\xi d\xi, \ \cdots, \\ b_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\xi)\sin\xi d\xi, \quad b_2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\xi)\sin 2\xi d\xi, \ \cdots \end{array}\right\} \tag{9}$$

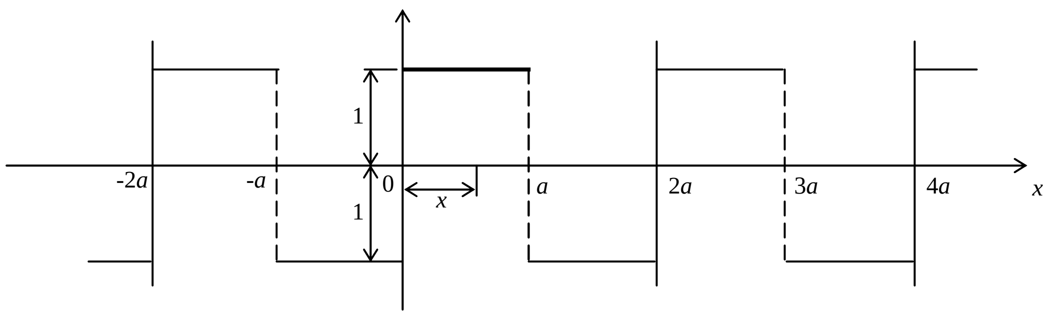

図 2 Fourier 級数（$\xi = \pi x/a$）

式(7)の展開式をうるには，(0, a)の間で 1 になりさえすればよいのであるが，図 2 のように便宜(a, 2a)区間では－1 になるように追加しても差し支えない．こうして，(0, 2a)の間の関数値が周期的に繰り返されるようにする．このような関数は

$$\left.\begin{array}{ll} 0 < \xi < \pi \quad のとき & f(\xi) = 1 \\ \pi < \xi < 2\pi \quad のとき & f(\xi) = -1 \end{array}\right\} \qquad (\xi = \pi x/a) \tag{10}$$

さて，図 2 の場合では

$$f(-\xi) = -f(\xi), \qquad f(\xi+\pi) = -f(\xi)$$

であるために，それぞれ

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = 0, \qquad b_2 = b_4 = b_6 = \cdots = 0$$

でなければならないから，式(7.8)は次の簡単な形になる．

$$f(\xi) = b_1\sin\xi + b_3\sin 3\xi + b_5\sin 5\xi + \cdots \tag{11}$$

式(11)の中の係数 $b_1, b_3, b_5, \cdots$ を式(9)によって定めれば

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\sin\xi d\xi = \frac{1}{a}\int_0^{2a} f\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\frac{\pi x}{a}dx = \frac{1}{a}\int_0^{a}\sin\frac{\pi x}{a}dx - \frac{1}{a}\int_a^{2a}\sin\frac{\pi x}{a}dx = -\frac{1}{\pi}\left[\cos\frac{\pi x}{a}\right]_0^a + \frac{1}{\pi}\left[\cos\frac{\pi x}{a}\right]_a^{2a} = \frac{4}{\pi}$$

$$b_3=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\sin 3\xi d\xi=\frac{1}{a}\int_0^{2a}f\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\frac{3\pi x}{a}dx=\frac{1}{a}\int_0^{a}\sin\frac{3\pi x}{a}dx-\frac{1}{a}\int_a^{2a}\sin\frac{3\pi x}{a}dx=-\frac{1}{3\pi}\left[\cos\frac{3\pi x}{a}\right]_0^a+\frac{1}{3\pi}\left[\cos\frac{3\pi x}{a}\right]_a^{2a}=\frac{4}{3\pi}$$

$$b_5=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\sin 5\xi d\xi=\frac{1}{a}\int_0^{2a}f\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\frac{5\pi x}{a}dx=\frac{1}{a}\int_0^{a}\sin\frac{5\pi x}{a}dx-\frac{1}{a}\int_a^{2a}\sin\frac{5\pi x}{a}dx=-\frac{1}{5\pi}\left[\cos\frac{5\pi x}{a}\right]_0^a+\frac{1}{5\pi}\left[\cos\frac{5\pi x}{a}\right]_a^{2a}=\frac{4}{5\pi}$$

$\cdots$

これらを式(11)に代入して

[式(10)の $f(\xi)$] $=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{a}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{a}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{a}+\cdots\right)$ 以上式(7)の証明終わり.

さて，式(7)により式(1)の微分方程式は

$$\frac{d^4w}{dx^4}=\frac{4p}{\pi D}\sum\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{a}\qquad (n=1,3,5,\cdots) \tag{12}$$

式(12)をとくのに，右辺の級数の各項に対応する w の項を求めることにして，

$$w=\sum A_n\sin\frac{n\pi x}{a}\qquad (n=1,3,5,\cdots) \tag{13}$$

とおき，未定係数 A_n を定めよう．式(13)を式(12)に代入して

$$\sum A_n\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4\sin\frac{n\pi x}{a}=\frac{4p}{\pi D}\sum\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

よって

$$A_n=\frac{4a^4p}{n^5\pi^5D}$$

この値を式(13)のたわみの式に代入して

$$w=\frac{4a^4p}{\pi^5D}\sum\frac{1}{n^5}\sin\frac{n\pi x}{a}\qquad (n=1,3,5,\cdots) \tag{14}$$

式(14)は境界条件(3)を満足していることをたやすく検証することができる.

Fourier 級数による解(14)は，前の解(4)と同じ値を与えることが検証できる．式(14)の級数は $1/n^5$ のためにかなり収束がよい．式(14)による中央（$x=a/2$）におけるたわみは

$$w_{x=\frac{a}{2}}=0.013071\left(1-\frac{1}{243}+\frac{1}{3125}-\cdots\right)\frac{a^4p}{D} \tag{15}$$

一方，前の解による値は式(6)から

$$w_{x=\frac{a}{2}}=\frac{5}{384}\frac{a^4p}{D}=0.013021\frac{a^4p}{D} \tag{16}$$

式(15)の右辺の第 1 項だけをとっても，その誤差は

$$\frac{0.013071-0.013021}{0.013021}=+0.0038$$

として通常差し支えないことがわかる．なお，式(15)の右辺の級数を第 3 項まで取れば，有効数字 5 桁まで式(16)に一致する.

注）このような問題を理解しておくと，荷重の Fourier 展開とか地震波形の Fourier 表示，写像関数の Fourier 表示などの意味が明確になる.