数 学 公 式

微分学の公式

1.　平均変化率　関数 $y = f(x)$ の $x = x_1$ から $x = x_2 (= x_1 + \Delta x)$ までの平均変化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$　（Δ は増分量を表す）

2.　微分係数

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

3.　導関数

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4.　微分の基本公式

(1)	定数	$y = c$ （c：定数）	$y' = 0$
(2)	定数係数	$y = cf(x)$ （c：定数）	$y' = cf'(x)$
(3)	和，差	$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$
(4)	積	$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
(5)	商	$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2}$
		$y = \dfrac{1}{g(x)}$	$y' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$
(6)	べき	$y = x^n$	$y = nx^{n-1}$
		$y = \{f(x)\}^n$	$y' = n\{f(x)\}^{n-1} f'(x)$
		$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

5.　三角関数

(1)	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
(2)	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
(3)	$y = \tan x$	$y' = \sec^2 x$
(4)	$y = \cot x$	$y' = -\operatorname{cosec}^2 x$
(5)	$y = \sec x$	$y' = \tan x \sec x$
(6)	$y = \operatorname{cosec} x$	$y' = -\cot x \operatorname{cosec} x$

5.　双曲線関数

(1)	$y=\sinh x$	$y'=\cosh x$
(2)	$y=\cosh x$	$y'=\sinh x$
(3)	$y=\tanh x$	$y'=\mathrm{sech}^2 x$
(4)	$y=\coth x$	$y'=-\mathrm{cosech}^2 x$
(5)	$y=\mathrm{sech} x$	$y'=-\mathrm{sech} x\tanh x$
(6)	$y=\mathrm{cosech} x$	$y'=-\mathrm{cosech} x\coth x$

5.　指数関数，対数関数

(1)	$y=e^x$	$y'=e^x$
(2)	$y=a^x$　(a>0，a≠1)	$y'=a^x\log a$
(3)	$y=\log x$	$y'=\dfrac{1}{x}$
(4)	$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x\log a}$

6.　いろいろな微分法

(1)　合成関数の微分

$y=f(u),\quad u=g(x)$　のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=f'(x)g'(x)$

$\{f(ax+b)\}'=af'(ax+b),\quad \left[\{f(x)\}^n\right]'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x),\quad \left\{\sqrt{f(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}},\quad \{\log|f(x)|\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

(2)　媒介変数で表された関数の微分

$x=f(t),\quad y=g(t)$　のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}\quad (f'(t)\neq 0)$

(3)　逆関数の微分

$x=f(y),\quad y=g(t)$　のとき　$\dfrac{dy}{dx}=1\Big/\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{f'(t)}\quad (f'(y)\neq 0)$

(4)　陰関数の微分　　$y=f(x)$ の形を陽関数表示，　$f(x,y)=0$ の形を陰関数表示という

［例］x,y の間に $ax^2+by^2=1$ の関係があるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

解：　両辺を x で微分すると，

$$\frac{d}{dx}(ax^2)+\frac{d}{dy}(by^2)=0,\quad \frac{d}{dx}(ax^2)+\frac{d}{dy}(by^2)\frac{dy}{dx}=0,\quad 2ax+2by\frac{dy}{dx}=0,\quad \therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{ax}{by}$$

7. 関数の展開

(1) テーラー(Taylor)の定理　ある区間で $f(x)$ が微分可能であるとき

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n, \quad R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \quad (0<c<1)$$

この式において $a = x,\ x-a = h$ とおくと

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} + R_n, \quad R_n = \frac{f^{(n)}(x+ch)}{n!}h^n \quad (0<c<1)$$

(2) マクローリンの定理　上式で $x=0,\ h=x$ とおくと

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n, \quad R_n = \frac{f^{(n)}(cx)}{n!}x^n \quad (0<c<1)$$

(3) 上 3 式において $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ ならば次のような無限級数に展開できる

テーラー級数

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1}$$

マクローリン級数

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

(4) 特殊関数の展開

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 - \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots, \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \qquad \cos x = 1 - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \qquad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots, \qquad \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \qquad \log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \qquad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \qquad \tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} - \cdots$$

$$\sinh^{-1} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \cdots$$

8.　方程式の根

(i)　重根　$f(x)=0$ の重根を求めるには，$f(x)$ と $f'(x)$ との最大公約数 $g(x)$ を求め，$g(x)=0$ とするとき，この方程式の (m-1) 重根は $f(x)=0$ の m 重根である．

(ii)　根の近似値（ニュートンの方法）

$f(x)=0$ の 1 つの根の近似値を α_1 とすれば，これより精密な近似値 α_2 は

$$\alpha_2=\alpha_1-\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$$

9.　曲率

曲線 $y=f(x)$ 上の点(x,y)における曲率 $1/\rho$ は　$$\frac{1}{\rho}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}$$