振動の基本式のまとめ

目　次

1. 振動の基本式

1.1 運動方程式

外力の加力加振と構造物の応答（変位，速度，加速度，内力）の関係は運動方程式で与えられる．この方程式は力と運動の関係より次式のようになる．

・**ニュートンの運動方程式**：

質量 m の物体はそこに働く力 F の作用で次式で表される運動をする．

$$F = m\alpha \tag{1.1}$$

ここに，α は外力 F の方向の物体の加速度である．

・**動的平衡**：

ダランベールは，新しい力 $-m\alpha$ を導入して，次の方程式

$$F + (-m\alpha) = 0 \tag{1.2}$$

を導いた．これを**ダランベールの原理**という．この力 $-m\alpha$ を**慣性力**という．

これを

$$F_1 = -m\alpha \tag{1.3}$$

と置くと式(1.2)は $F + F_1 = 0$ と書ける．これは，内力 F_1 が逆の方向にその物体に作用して平衡状態にあるといえる．

式(1.1)は運動の方程式であるが，式(1.2)は静力学の式である．すなわち，ダランベールの原理は新しい慣性力という新しい力を導入することによって，運動している物体を静的に解析することができることを示している．

注） 単純に考えれば，式(1.1)の右辺を左辺に移動しただけである．これで後世に残る原理になるのであれば，大変魅力的である．

「**(左辺）=0**」なる式は**釣合い式**である．すなわち，「**左辺の様な計算をした結果が 0 となる（右辺）**」ということである．

1.2 自由度

動力学では，ある時刻のその系の形状位置を特定するのに複数の独立した座標，すなわち自由度で表す．一般に連続体は無限自由度であるが，解析を簡単にするため，ある有限の数の自由度で表す．

図 1.1 は 2 本の質量のない柱が，剛な床を支えている 1 自由度の理想化された（以下「モデル化された」という）構造物を示す．このような場合は，図 1.2 に示す単純加振というモデルになる．このモデルは

(1)　質量要素 m･･･質量あるいは内的特性を示す．

(2)　ばね要素 k･･･弾性回復力あるいは位置エネルギーを示す．

(3)　減衰要素 c･･･摩擦特性やエネルギー損失を示す．

(4)　外力 $F(t)$

からなる．

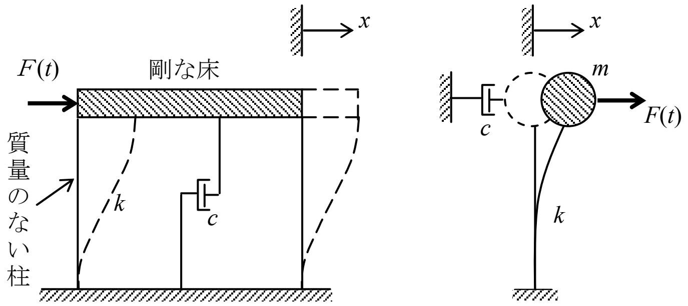


図 1.1 モデル化された一層構造物

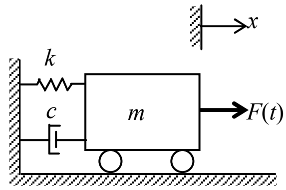


図 1.2 1 自由度系のモデル

図 1.2 のモデルを採用するときに，これらの要素は固有の特性だけを表すものとする．つまり，

m は慣性特性だけを表し，弾性あるいはエネルギー損失などは含まない．

k は慣性やエネルギー損失などは含まない．

c はエネルギー損失特性だけを表す．

なお

解析上バネ k は力 $F(t)$と変位 x の関係を一定に保つ．

減衰 c は一般に速度に比例し，その力は反対方向に作用する内部粘性減衰である．

1.3 自由物体

ニュートンの運動方程式の適用によって運動方程式を求める場合，自由物体を描く．自由物体とは他の物体から切り離した物体にすべての外力を作用させたものである．

図 1.3(b)は加振物体の自由物体で，力 kx，減衰力 $c\dot{x}$，外力 $F(t)$を示す．$\dot{x}$ は変位 x の 1 階微分であり速度を表す．$\ddot{x}$ は加速度である．

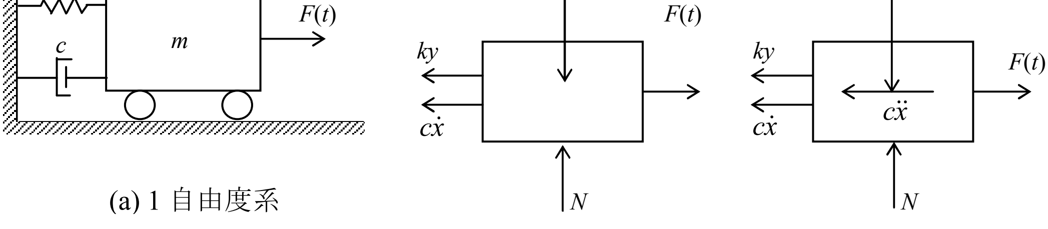
ニュートンの法則，式(1.1)を用いれば，図(1.3(b)に示された自由物体の質量 m は次の運動方程式により表すことができる．

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{1.4}$$

慣性力 $F_1 = -m\ddot{x}$ を自由物体で表現すると図 1.3(c)に示すようになる．この場合には動的並行を表すダランベールの定理が摘要され，力の合力は 0 となり，次式が成り立つ．

$$F(t) - m\ddot{x} - c\dot{x} - kx = 0 \tag{1.5}$$

これは式(1.4)と同じである．



(a) 1 自由度系

(b) 外力

(c) 内力と外力

図 1.3 外力が作用している場合の自由物体

1.4 支点の移動

図 1.5 は地震の場合の支点での動きによって過信される一層の構造物を示す．通常，支点の加振は G という単位で表現される時刻加振度関数として知られている．この関数は重力加速度の係数倍で与えられる．図 1.4 に示される系は図 1.5(a)でモデル化され，図 1.5(b)に示す自由物体から動的平衡式が次のように得られる．

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_s) + k(x - x_s) = 0 \tag{1.6}$$

ここで，質量と支点の相対変形を

$$u = x - \dot{x}_s \tag{1.7}$$

とすると，式(1.6)は

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{x}_s(t) \tag{1.8}$$

となる．式(1.4)において $F_{eff}(t) = -m\ddot{x}(t)$ と見なせば

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_{eff}(t) \tag{1.9}$$

となって，数学的には同じ形になる．

2 階微分方程式(1.4)と式(1.9)は，力によって質量が加振された時の応答と支点が動いた時の相対運動を表す．

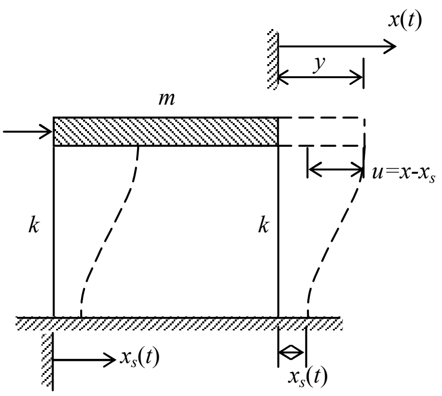


図 1.4 基礎が加振された場合の
一層構造物

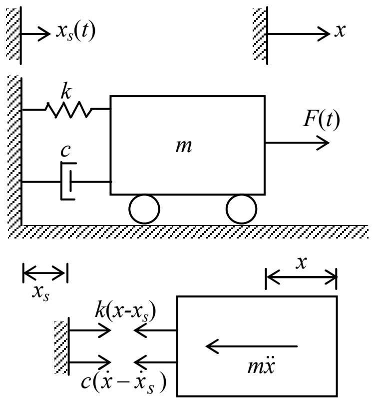


図 1.5 (a) 基礎が加振された場合のモデル
(b) 自由物体

1.5 微分方程式の解

ここでは，系に外力が働かず初期条件の下で自由振動する場合を取り扱う．すなわち式(1.4)において，右辺の外力を 0 として，左辺の粘性減衰係数 c が 0 の場合と，減衰がある場合について考察する．

これらの場合の解はどの本にも詳しく解説されているので解のみを示す．

(1) 減衰のない自由振動（c=0 の場合）

微分方程式： $m\ddot{x} + kx = 0$ (1.10)

解： $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ (1.11)

ここに，ω は**自由円振動数**で

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(rad/sec)}$$

であり，C_1，C_2 は積分定数である．

積分定数は初期条件により決まり，時刻 t=0 での変位を x_0，速度を v_0 とすると

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \tag{1.12}$$

または

$$\left.\begin{aligned} x &= C \sin(\omega t + \alpha) \\ x &= C \cos(\omega t - \beta) \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

ここに

$$C = \sqrt{x_0^2 + (v_0 / \omega)^2} \qquad \text{（振幅あるいは運動量）}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{v_0 / \omega}\right), \quad \beta = \tan^{-1}\left(\frac{v_0 / \omega}{x_0}\right) \qquad \text{（位相角）}$$

である．

(2)　減衰のある自由振動（c がある場合）

微分方程式：　$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ (1.14)

解：　$x = e^{-h\omega}[C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t]$ (1.15)

$= Ce^{-h\omega} \cos(\omega_1 - \alpha)$ (1.16)

ここに

$$h = \frac{c}{c_{cr}} \qquad \text{（減衰定数）} \tag{1.17}$$

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} \qquad \text{（臨海減衰定数）} \tag{1.18}$$

$$\omega_1 = \omega\sqrt{1 - h^2} \qquad \text{（減衰円振動数）} \tag{1.19}$$

C と α は初期条件で決まり

$$C = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0 + x_0 h\omega}{\omega_1}\right)^2} \qquad \text{（運動量）} \tag{1.20}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_0 + x_0 h\omega}{\omega_1 x_0}\right) \qquad \text{（位相角）} \tag{1.21}$$

系は外乱があると周期的に振動し，もし減衰係数が臨海減衰係数よりも小さければ，減衰定数 $h = c / c_{cr} < 1$ で与えられる．

1.6 振動数と周期

式(1.11)や式(1.12)は調和的な動き（sin，cos 関数）をしているから周期 T は 2π である．したがって

$$\omega T = 2\pi \quad \text{または} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \ \text{(sec)} \tag{1.22}$$

周期の逆数を振動数 f といい

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \text{（Hz　or　cps）} \tag{1.23}$$

で表される．